

Egyszerű összefonódott rendszerek geometriája és a fekete lyuk-qubit megfelelés

írta

Lévay Péter Pál

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Fizikai Intézet
Elméleti Fizika Tanszék

Akadémiai Doktori Értekezés

A Magyar Tudományos Akadémia
Doktori Tanácsának
Fizikai Tudományok Osztályának
Részecskefizikai Tudományos Bizottságának számára az
MTA doktora cím elnyeréséért



2017

Szüleim emlékének.

Tartalomjegyzék

A tézispontokhoz kapcsolódó publikációk	ix
1. fejezet. Bevezetés	1
1.1. Egyszerű összefonódott rendszerek	1
1.2. Fekete lyuk-qubit megfelelés	3
1.3. A dolgozat felépítéséről és az összefonódottság szerepéről	5
2. fejezet. Egyszerű összefonódott qubit rendszerek geometriája	9
2.1. Két megkülönböztethető részrendszerből álló rendszerek	9
2.1.1. Schmidt dekompozíció és von-Neumann entrópia	9
2.1.2. Összefonódottsági osztályok	11
2.2. Két-qubit rendszerek	12
2.2.1. Konkurrencia és Schmidt dekompozíció	12
2.2.2. A két qubites összefonódottság geometriája	14
2.2.3. A Schmidt dekompozíció és a kvaterniós Hopf nyaláb	16
2.2.4. Kvaterniós fázisfaktorok	17
2.2.5. A két-qubit SLOCC osztályok geometriája	19
2.3. Kevert állapotok összefonódottsága	21
2.4. Valós két részrendszert tartalmazó kétállapotú rendszerek	22
2.5. Három-qubit rendszerek	24
2.5.1. Invariánsok és SLOCC osztályok	24
2.5.2. A hármas összefonás SLOCC invarianciája	27
2.5.3. A három qubit SLOCC osztályok geometriája	27
2.5.4. Twistor geometriai analógia	34
2.5.5. Valós három-qubit állapotok	35
2.5.6. A Coffmann-Kundu-Wootters reláció geometriája	37
2.6. Négy qubit rendszerek	38
2.6.1. Polinom invariánsok	38
2.6.2. Négy-qubit állapotok és az $SO(8)$ csoport	40
2.6.3. Négy-qubit $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ SLOCC osztályok	41
2.6.4. G -SLOCC összefonódottsági osztályok modulo permutációk	43
2.6.5. Négy-qubit állapotok és elliptikus görbék	44
2.6.6. A négy-qubit invariánsok geometriája	46
2.7. N -qubit rendszerek	47
2.7.1. N -qubit rendszerek partíciói és a Grassmann sokaság	47
2.7.2. Összefonódottsági mértékek	48
2.7.3. Példák N -qubit SLOCC invariánsokra	49
3. fejezet. Egyszerű fermionikus rendszerek geometriája	51
3.1. Két megkülönböztethetetlen részrendszerből álló rendszerek	51

3.1.1.	Bevezetés	51
3.1.2.	Két fermionos összefonódottság	51
3.1.3.	Két fermion négy egyrészecske állapottal	53
3.2.	Több megkülönböztethetetlen részrendszeres rendszerek	55
3.2.1.	N -fermion rendszerek	55
3.2.2.	N -fermion rendszerek szeparálhatósága	56
3.2.3.	Beágyazott N -qubit rendszerek	57
3.2.4.	Fermionikus beágyazott rendszerek	59
3.3.	Háromfermion rendszerek	60
3.3.1.	Három formák a fizikában	60
3.3.2.	Három fermion hat egyrészecske állapottal. A negyedrendű invariáns	61
3.3.3.	Három fermion hat egyrészecske állapottal. SLOCC osztályok	63
3.3.4.	Fermionikus GHZ-szerű állapotok	65
3.3.5.	Valós fermionikus SLOCC osztályok	65
3.4.	Három fermion hét egyrészecske állapottal	67
3.4.1.	Alapvető invariánsok és kovariánsok	67
3.4.2.	SLOCC osztályok	69
3.4.3.	Valós háromfermion állapotok	73
3.5.	Összefonódottság a fermionikus Fock térben	76
3.5.1.	Általánosított SLOCC transzformációk	76
3.5.2.	Fermionikus állapotok mint spinorok	78
3.5.3.	Szeparálható állapotok mint egyszerű spinorok	80
3.5.4.	Fermionikus invariánsok	82
3.5.5.	Négy módus	83
3.5.6.	Hat módus	84
3.5.7.	Három-qubit rendszerek beágyazásai	85
4.	fejezet. Freudenthal rendszerek	91
4.1.	Motiváció	91
4.2.	Három bozonikus qubit	92
4.3.	Freudenthal-féle hármasrendszerek	93
4.3.1.	Szimplektikus hármasrendszerek	94
4.3.2.	A hat módusú fermionrendszer mint szimplektikus hármasrendszer	94
4.3.3.	Jordan algebrák	96
4.3.4.	Freudenthal-féle hármas rendszerek és Jordan algebrák	98
4.3.5.	A hármas-szorzat	100
4.3.6.	A kvartikus invariáns és a Freudenthal duálás	100
5.	fejezet. A fekete-lyuk/qubit megfelelés	103
5.1.	Bevezetés	103
5.2.	Attraktorok, fekete lyukak, és qubitek	104
5.3.	Qubitek és toroidális geometria	105
5.3.1.	Egy qubit és a tórusz	105
5.3.2.	$T^2 \times T^2 \times T^2$ mint három qubit rendszer	110
5.3.3.	Fermionikus rendszerek és a hat dimenziós tórusz	112
5.4.	Fekete lyuk megoldások a húrelméletben	115
5.4.1.	A húrelméletről röviden	115
5.4.2.	IIA és IIB típusú húrelméletek	117
5.4.3.	IIB típusú szupergravitáció	119
5.5.	Az effektív négy dimenziós hatás	121

5.5.1. Effektív hatás és toroidális kompaktifikáció	121
5.5.2. STU model	123
5.5.3. A statikus ansatz	124
5.5.4. A csavarodási számok fizikai jelentése	125
5.5.5. A Dirac-Born-Infeld hatás fizikai jelentése	125
5.5.6. Az öt formákra vonatkozó hatás fizikai jelentése	127
5.5.7. Az effektív dinamikai rendszer	128
5.6. BPS fekete lyukak	129
5.6.1. Extremális BPS fekete lyukak	129
5.6.2. Az attraktor mechanizmus	131
5.6.3. A modulusok stabilizálása és GHZ állapotok	135
5.6.4. Attraktorok eltűnő konkurenciából	137
5.6.5. Szuperszimmetria	140
5.7. Nem-BPS fekete lyukak	142
5.7.1. Attraktorok eltűnő centrális töltéssel	143
5.7.2. A nem-BPS $Z \neq 0$ alapmegoldás	145
5.7.3. Általános nem-BPS $Z \neq 0$ attraktorok	146
5.7.4. Extremális megoldások és hibajavító kódok	150
6. fejezet. Négy-qubit rendszerek és az STU modell	151
6.1. Motiváció	151
6.2. $D = 3$ dimenzió redukció	151
6.3. Négy-qubit formalizmus	153
6.3.1. Négy-qubit Iwasawa parametrizáció	153
6.3.2. A modulus tér ívelem négyzete	155
6.3.3. Hadamard transzformált kép	155
6.3.4. Az ívelemnégyzet mint négy-qubit invariáns	156
6.4. Fekete lyuk megoldások mint geodetikusok	158
6.4.1. Extremális megoldások mint fényszerű geodetikusok	158
6.4.2. Megmaradó mennyiségek	159
6.4.3. BPS megoldások és szeparabilitás	160
6.4.4. Nem-BPS megoldások eltűnő centrális töltéssel, szeparábilis eset	161
6.4.5. Nem-BPS megoldások, összefonódott eset	161
6.5. Négy-qubit SLOCC osztályok és fekete lyuk megoldások	162
7. fejezet. Hitchin funkcionálok és összefonódottsági mértékek	165
7.1. Motiváció	165
7.2. Calabi-Yau sokaságok	165
7.3. BPS Calabi-Yau attraktorok	168
7.3.1. Motiváció	168
7.3.2. Szimplektikus formalizmus	169
7.3.3. Calabi-Yau attraktorok	170
7.4. Hitchin funkcionál	172
7.4.1. A Hitchin invariáns mint összefonódottsági mérték	172
7.5. BPS attraktorok mint kritikus pontok	174
7.6. Általánosított Hitchin funkcionál	177
7.6.1. Motiváció	177
7.6.2. Általánosított Calabi Yau sokaságok	178
7.6.3. A kvaterniós Freudenthal rendszer és az általánosított Hitchin funkcionál	179
7.6.4. Fizikai interpretáció	180

7.6.5. IIA-IIB dualitás	182
7.7. Speciális holonómiájú sokaságok és hét módusú fermionrendszerek	184
7.8. Összefoglalás	185
8. fejezet. E_7 és hét-qubit három részrendszeres összefonódottsága	187
8.1. Motiváció	187
8.2. Az E_7 szimmetrikus entrópia formula	187
8.3. Az októniós Freudenthal rendszer ciklikus realizációja	189
8.4. U-dualitási szimmetria és kvantum kapuk.	190
8.5. Az októniós Freudenthal rendszer Hamming kódos realizációja	193
8.6. Az E_7 szimmetrikus fekete lyuk entrópiaformula szerkezete	196
8.7. Összefoglalás	199
9. fejezet. Kitekintés	201
9.1. Az egyszerű összefonódott rendszerek szerepéről	201
9.2. A FLYQM fizikai háttéréről	202
9.2.1. Holografikus összefonódottság	202
9.2.2. FLYQM és bit-szálak?	204
Irodalomjegyzék	207

A tézispontokhoz kapcsolódó publikációk

- [1] Péter Lévay. The geometry of entanglement: metrics, connections and the geometric phase. *Journal of Physics A*, 37(5):1821, 2004.
- [2] Péter L  vay. Geometry of three-qubit entanglement. *Phys. Rev. A*, 71:012334, Jan 2005.
- [3] Péter L  vay. On the geometry of four-qubit invariants. *Journal of Physics A*, 39(30):9533, 2006.
- [4] Péter L  vay. Stringy black holes and the geometry of entanglement. *Phys. Rev. D*, 74:024030, Jul 2006.
- [5] Péter L  vay. Strings, black holes, the tripartite entanglement of seven qubits, and the Fano plane. *Phys. Rev. D*, 75:024024, Jan 2007.
- [6] Péter L  vay. Three-qubit interpretation of BPS and non-BPS STU black holes. *Phys. Rev. D*, 76:106011, Nov 2007.
- [7] Péter L  vay. Attractors, black holes and multiqubit entanglement. In Stefano Bellucci, editor, *The Attractor Mechanism*, Springer Proceedings in Physics. Springer, 2010.
- [8] Péter L  vay. STU black holes as four-qubit systems. *Phys. Rev. D*, 82:026003, Jul 2010.
- [9] Péter L  vay. Qubits from extra dimensions. *Phys. Rev. D*, 84:125020, Dec 2011.
- [10] Péter L  vay. Two-center black holes, qubits, and elliptic curves. *Phys. Rev. D*, 84:025023, Jul 2011.
- [11] Péter L  vay and Frédéric Holweck. Embedding qubits into fermionic Fock space: Peculiarities of the four-qubit case. *Phys. Rev. D*, 91:125029, Jun 2015.
- [12] Péter L  vay, Szilvia Nagy, and János Pipek. Elementary formula for entanglement entropies of fermionic systems. *Phys. Rev. A*, 72:022302, Aug 2005.
- [13] Péter L  vay, Metod Saniga, and Péter Vrana. Three-qubit operators, the split Cayley hexagon of order two, and black holes. *Phys. Rev. D*, 78:124022, Dec 2008.
- [14] Péter L  vay, Metod Saniga, Péter Vrana, and Petr Pra  na. Black hole entropy and finite geometry. *Phys. Rev. D*, 79:084036, Apr 2009.
- [15] Péter L  vay and Gábor Sárosi. Hitchin functionals are related to measures of entanglement. *Phys. Rev. D*, 86:105038, Nov 2012.
- [16] Péter L  vay and Szilárd Szalay. Attractor mechanism as a distillation procedure. *Phys. Rev. D*, 82:026002, Jul 2010.
- [17] Péter L  vay and Szilárd Szalay. STU attractors from vanishing concurrence. *Phys. Rev. D*, 83:045005, Feb 2011.
- [18] Péter L  vay and Péter Vrana. Three fermions with six single-particle states can be entangled in two inequivalent ways. *Phys. Rev. A*, 78:022329, Aug 2008.
- [19] Péter L  vay. Thomas rotation and the mixed state geometric phase. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(16):4593, 2004.
- [20] Péter L  vay. On the geometry of a class of n -qubit entanglement monotones. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(41):9075, 2005.

1. FEJEZET

Bevezetés

1.1. Egyszerű összefonódott rendszerek

A múlt század huszas éveiben keletkezett kvantumelmélet számos, a józan észet meghazudtoló tulajdonsággal rendelkezik. Az egyik ilyen tulajdonság a kvantumos összefonódottság. Az összefonódottság kifejezés Erwin Schrödingertől ered aki a kifejezéssel kvantumrendszerek részrendszerei közötti speciális kapcsolatok lehetőségére utalt [Sch35a].

Bármely fizikai rendszer leírására megfigyelhető fizikai mennyiségek rendszerét használjuk. Ilyenek az energia, impulzus, impulzusmomentum stb. Ezen mennyiségek értékeit a rendszer *tulajdonságaiként* interpretáljuk. A klasszikus fizikán iskolázott elme számára természetes elvárás az, hogy a teljes rendszert ily módon jellemző tulajdonságok a rendszer részrendszereit is jellemzik. Egy muzikális családtól például elvárjuk, hogy a tagjai rendelkezzenek a muzikalitás tulajdonságával. Az ilyen rendszereket *szeparálható* rendszereknek nevezik.

Kvantumrendszerek esetén azonban előfordulhat az is, hogy a rendszert jellemző tulajdonságok a részrendszereket nem jellemzik. Ez a hasonlatunk kontextusában arra a meglehetősen furcsa szituációra vezetne, hogy családunk ugyan muzikális, de a tagjai botfülűek. Az ilyen rendszereket *összefonódott* rendszereknek nevezik. Például két triplett állapotban lévő megkülönböztethető $\frac{1}{2}\hbar$ saját impulzusmomentummal rendelkező részecske egy meghatározott tengelyre vett határozott impulzusmomentum vetülettel (\hbar) rendelkezik, ez a tulajdonság azonban a páros tagjaira külön-külön nem jellemző. Ekkor a részecskepáros összefonódott állapotban van.

A kvantum információelmélet megjelenésével [Fey82, Deu85, DiV95, Sho99, NC00] nyilvánvalóvá vált, hogy a kvantumos összefonódottság jelensége nemcsak az elmélet szokatlanságát szemlélteti, hanem ugyanakkor egy olyan fontos *erőforrást* is biztosít, melynek segítségével javunkra fordíthatjuk a kvantumos világ ezen furcsaságait. Ez az erőforrás reményeink szerint lehetővé teszi majd olyan kvantum számítógépek építését is, melyek bizonyos számítástechnikai feladatok elvégzését látványosan jobb hatásfokkal képesek biztosítani mint a jelenleg jólismert klasszikus társaik [Sho99, NC00].

Bármely erőforrás esetén alapvető fontosságú az erőforrás különböző típusainak elkülönítése, illetve kvantifikálása. Az összefonódottság esetén ez egy meglehetősen összetett feladat. Első lépésként ugyanis le kell rögzítenünk azokat a fizikai kritériumokat, melyek alapján az összefonódottság egyes típusait osztályozzuk. Ugyanakkor ezek a kritériumok az összefonódottság kvantifikálására használatos összefonódottsági mértékek definiálásához is irányadók kell, hogy legyenek. Az összefonódottságnak mint erőforrásnak az osztályozásához a leghasználhatóbb kiindulópont az összetett kvantumrendszer részrendszereivel kapcsolatos *megengedhető* fizikai manipulációk kiválasztása kínálkozik. Ha például a kvantumrendszerünk két térben jól elkülöníthető tartományra bontható, akkor elvárható, hogy a részrendszerekkel kapcsolatos *lokális* manipulációk nem változtatják meg az összefonódottságot. Összefonódottság létrehozásához olyan *globális* transzformációk lehetőségét is meg kell engednünk, melyek a két részrendszer közötti bizonyos típusú kölcsönhatások kialakulását is biztosítják.

A fentiekben vázolt fizikai elvek a kvantumelmélet matematikájának nyelvén az alábbi módon reprezentálhatók. A kvantumrendszerek lehetséges állapotainak és tulajdonságainak teljes rendszereinek matematikai reprezentánsai: egy tenzorszorzat Hilbert tér elemei¹, illetve a Hilbert téren ható önadjungált operátorok kommutáló rendszerei. Megmutatható [GM04, GW02], hogy a fenti értelemben definiált szeparálható állapotokra a tenzor szorzat tér állapotvektorra maga is szeparálható, míg összefonódott állapotokra ilyen szeparált alak nem adható meg. Ebben a képben a lokális manipulációknak az egyes tenzorszorzat faktorokon történő operátorok alkalmazása felel meg. Amennyiben az operátorok unitérek, akkor ezek a részrendszerek szokásos Schrödinger képbeli időfejlődését reprezentálják. Nem unitér operátorok alkalmazása pedig általánosított mérésekkel [NC00] kapcsolatos manipulációknak felel meg. A kvantum manipulációkon túl érdemes megengedni klasszikus manipulációkat is. Például a térben elkülöníthető részrendszerek esetén, ezeket lokálisan transzformáló (térben szintén elkülönített) felek, szokásos klasszikus csatornák útján még tudósíthatják egymást arról, milyen manipulációt is végeztek a rendszereiken. Ennélfogva ennek a klasszikus csatornán közölt információnak a következő lépésben végrehajtott kvantum transzformáció már függvénye lehet. Érdemes még azt is megkövetelni, hogy amennyiben a rendszer állapotát lokális manipulációkkal valamilyen valószínűséggel sikerül egy másik állapotba áttranszformálni, akkor a visszatranszformálás művelete is megengedhető (jóllehet a sikeres visszatranszformálás valószínűsége már akár más is lehet). Az ilyen transzformációkat klasszikus kommunikációval kiegészített sztohasztikus lokális operációknak (SLOCC) nevezik [DVC00]. Megmutatható, hogy az ilyen manipulációk végrehajtásának matematikai szempontból az invertálható komplex lineáris csoport elemeinek egyes tenzor faktorokon történő alkalmazása felel meg [DVC00]. Két állapotot SLOCC ekvivalensnek nevezünk, ha található a fenti csoportnak olyan eleme, melynek alkalmazása az egyik állapotra, a másikat szolgáltatja. Ennek megfelelően a SLOCC csoport tenzorszorzat állapottéren történő hatásának pályái ekvivalencia osztályokat definiálnak. Ezeket az osztályokat SLOCC összefonódottsági osztályoknak nevezik.

A SLOCC összefonódottsági osztályok elkülönítésére és az összefonódottság kvantifikációjára polinom invariánsokat és kovariánsokat használhatunk. Ezek az állapotok komplex amplitúdóban olyan polinomiális kifejezések, melyek az állapotokhoz komplex számokat rendelnek hozzá, és a SLOCC csoport hatására nézve egy karakter erejéig invariánsak vagy kovariánsak. A SLOCC klasszifikáció alapja annak vizsgálata, hogy ezek a mennyiségek bizonyos SLOCC osztályokon zérus, másokon nem zérus értékeket vesznek fel. Az invariánsok és kovariánsok eltűnése által meghatározott polinomiális relációk speciális algebrai varietások megjelenésére vezetnek [FH91]. Ezek az algebrai geometriai struktúrák természetes módon kapcsolatba hozhatók bizonyos karakterisztikus összefonódottsági osztályokkal. Ennek a dolgozat szempontjából a legfontosabb következménye az, hogy az összefonódottság jelenségét geometriai módszerekkel vizsgálhatjuk.

A SLOCC invariánsok némelyikének abszolút értékét felhasználhatjuk összefonódottsági mértékek konstruálására és így erőforrásunk kvantifikációjára. Annak eldöntése, hogy mely SLOCC invariánsok rendelkeznek fizikai szempontból értékes információval, további vizsgálatokat igényel [Vid00]. A hasznos összefonódottsági mértékek kiválasztásában az invariánsok geometriai szerkezetének alapos vizsgálata további támpontokat ad.

A dolgozat fő témája az összefonódottság geometriai vonatkozásainak egyszerű rendszerekre történő vizsgálata. Az egyszerűség esetünkben azt jelenti, hogy a tanulmányozott rendszereink csupán néhány részrendszerből, részrendszereink pedig qubitekből (kétállapotú rendszerek) vagy néhány egyrészecske állapottal rendelkező fermionokból fognak állni. A megkülönböztethetetlen részrendszerek tárgyalását csak a fermionikus rendszerekre adjuk meg². Ezt az indokolja, hogy a megkülönböztethető részrendszeres eseteket (qubitek, qutritok, quditok stb.) alkalmasan

¹Pontosabban a fenti tér úgynevezett *sugarai*.

²A három bozonikus qubit esetét leszámítva bozonokkal nem foglalkozunk.

választott fermionikus rendszerekbe természetes módon beágyazhatjuk. Ennek az a meglepő következménye, hogy a fermionikus rendszerek az összefonódottság geometriájának tanulmányozásához egy természetes formalizmust biztosítanak [18, Sár16]. Ennek a megközelítésnek a további előnye az, hogy a fermionikus SLOCC összefonódottságot változó fermionszám esetére is általánosíthatjuk. Természetesen számos fontos eredményt tetszőleges számú qubitre illetve fermionra is általánosítottunk, azonban a dolgozat fő gondolatmenete speciális összefonódott rendszerek tulajdonságainak vizsgálatára koncentrál. A speciális összefonódott rendszerek szerepének hangsúlyozása egyrészt abból a reményből táplálkozik, hogy a bonyolultabb összefonódottsági struktúrákat minél egyszerűbb algebrai és geometriai mintázatokra vezessük vissza³. Másrészt, ezen rendszerek alapos megértése iránti törekvés a dolgozat második felében tárgyalásra kerülő fekete-lyuk/qubit megfeleléssel kapcsolatos vizsgálatok során nyer majd mélyebb értelmet.

Végezetül felhívjuk az Olvasó figyelmét arra a fontos tényre, hogy a geometriai módszerek alkalmazása a tudomány történetében alapvető fontosságú. Kepler híres mondása "Ubi materia, ibi geometria"⁴ a természet alapvető kölcsönhatásainak feltérképezésében mély jelentéssel bíró alapelvnek bizonyult. Valóban a fenti idézet akár a klasszikus gravitációelméletet geometriai kontextusban prezentáló általános relativitáselmélet mottója is lehetne. Továbbá amennyiben felidézzük, hogy az elektromágneses, gyenge és erős kölcsönhatások mértékszimetriákon alapuló egységes standard modellje is egy, a fibrált nyalábokon alapuló elegáns geometriai képbe foglalható, a geometria nézőpont létjogosultsága további magyarázatot nem igényel. Fontos azonban azt is látnunk, hogy a geometriai perspektíva nem csupán az alapvető kölcsönhatások *klasszikus* térelméletén alapuló megértéséhez ad támpontot. Valóban világunk inherens módon kvantumtermészetű, ezért az alapvető kölcsönhatások kvantumos jellemvonásainak alapos kiismerése természetes elvárás. Ez veti fel azt az igényt, hogy a kvantálás és a geometria összefüggéseit lehetőleg minél egyszerűbb rendszerekre vizsgáljuk. A kvantálás és a geometria elemi rendszerekre történő összejátékának fontosságát már számos jólismert fizikai jelenség igazolta. Elég itt a kvantum időfejlődés geometriai vonatkozásaival kapcsolatos Berry-féle fázisfaktorokra [Ber84], az Aharonov-Bohm effektusra [AB59], a tört statisztikájú anyonok [LM77, Wil82] két dimenziós rendszerekben történő megjelenésére utalnunk. A dolgozat első felében bemutatott több részrendszeres kvantumos összefonódottság geometriai szempontok alapján történő tárgyalása, reményeink szerint, a kvantumelmélet fenti hagyományok szellemében történő mélyebb megértését teszi majd lehetővé.

1.2. Fekete lyuk-qubit megfelelés

A fizika története során néha előfordul, hogy két egymástól függetlenül fejlődő terület között egy bizonyos ponton váratlan kapcsolatokra derül fény. Ezek a kapcsolatok fakadhatnak abból az egyszerű tényből, hogy a szóban forgó területekkel kapcsolatos elméletek szerkezete *matematikai* hasonlatosságokat mutat. Ebben az esetben a felbukkanó kapcsolat tisztán strukturális természetű. Ritkábban azonban az is előfordul, hogy a megfelelő *fizikai* jelenségek között talált kapcsolat egy mélyebben rejlő egységesítő elv működésére utal. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a megfelelő területekkel kapcsolatos elméletek ugyanannak a fizikai valóságnak a *duális* leírását adják.

Erre a jelenségre jó példát szolgáltat a hullám-részecske dualizmus. A fény viselkedésével kapcsolatos fizikai jelenségeket a kísérleti elrendezés függvényében egyszer egy korpuszkuláris, másszor pedig egy hullámelméleti képben érthetjük meg. Hasonlóképpen tekinthetjük az elektromos és mágneses alapjelenségek között található jól ismert kapcsolatokat egyfajta dualitás folyamán, mely a háttérben húzódó egységesítő Maxwell-féle elektromágneses elméletre utal.

³Gondoljunk az elemi lineáris harmónikus oszcillátor igen speciális algebrai tulajdonságaira, és a kvantumtérelméletekben építőközként betöltött kardinális szerepére.

⁴"Ahol anyag, ott geometria."

Ebben az esetben a fent említett *fizikai* elektromos-mágneses dualitás a Maxwell-egyenletek rendszerét változtatlanul hagyó *matematikai* dualitási csoport transzformáció képében jelenik meg.

Az utóbbi két évtized során a modern fizika a fentiekhez hasonló *matematikai* dualitások osztályát számos új példával gyarapította. A legtöbb példát az extra dimenziókat is tartalmazó téridőben rezgő kiterjedt objektumok (nyílt és zárt hurok, membránok) kvantumos dinamikáját tárgyaló húrelméletek adták [JHS07]. A húrelméletek konzisztens kvantumgravitáció elméletek. Ezek az elméletek azonban nem függetlenek. Kiderült, hogy a húrelmélet öt különböző lehetséges konzisztens típusát nemtriviális dualitási szimmetriák kötik össze [JHS07]. Például a húrelmélet egyik gyengén kölcsönható változata, egy másik erősen kölcsönható változatának felel meg. Ez a megfelelés precíz matematikai formába önthető (S-dualitás [SEN94]). A különös dualitások egy másik változata azt mutatja, hogy a húrelmélet egyik típusa egy meghatározott topológiával bíró extra dimenziós háttéren, fizikai szempontból ugyanúgy viselkedik, mint a húrelmélet egy másik típusa egy topológiai szempontból nagyon különböző másik háttéren (T-dualitás [SYZ96], tükrörszimmetria [COGP91]). Úgy tűnik a húrelméletek között létezik még mindezeket a dualitásokat kombináló, és ezen túlmutató olyan kapcsolat is mely a dualitások elméletét egy egyesített képbe szervezi (U dualitás [HT95]). A kibontakozó kép a kiterjedt objektumok kvantumos dinamikáját leíró, M-elméletnek [JHS07, Du96] nevezett matematikai rendszer megalkotásához vezetett. Az öt különbözőnek hitt húrelmélet ebben a képben az M-elmélet speciális eseteiként áll elő.

Sajnos az M-elmélet, és az azt jellemző *matematikai* dualitások alapjául szolgáló *fizikai* alapelvek teljes rendszere, a kísérleti input hiányában, ezidáig ismeretlen. Egy fontos alapelve azonban mégis fény derült. Ez a Holografikus Elv [tH93, Sus95] mely az ún. AdS/CFT [Mal99] megfelelésben csúcsosodott ki. Ezek szerint bizonyos (magasabb dimenziós) anti de-Sitter geometriával rendelkező térfogatban felírt kvantumos gravitációelméletek megfeleltethetők egy, a térfogat (magasabb dimenziós) határán felírt alkalmas konform kvantumtérelméleteknek. Az AdS/CFT megfelelés felfedezése óta szabályos diadalutat futott be. A megfelelést a fizika számos területén alkalmazták: a szilárdtestfizikában [Her09], a nehézion fizikában [Kov12], a hidrodinamikában [BRS⁺08], a fekete lyukak fizikájában [Sol06].

A jelen dolgozat második felének tárgya egy kevésbé ismert, a kvantum információelmélet és a húrelmélet között talált "megfelelés" vizsgálata. A "Fekete Lyuk-Qubit Megfelelés" (FLYQM) kifejezés Michael J. Duff-tól származik [BDD⁺10] aki 2006-ban a területeket összekötő első fontos megfigyelést tette [Duf07]. Az ezt követő évek során kiderült, hogy a fenti két elmélet hatáskörén belül ezidáig függetlenül fejlődő kvantumos összefonódottságnak, és a húrelméleti fekete lyuk megoldásoknak az elmélete számos esetben meglepő strukturális kapcsolatokat mutat [KL06, 4, 5, DF07b, DF07a, 6]. A megfelelés szót nem véletlenül tettük idézőjelbe. Az AdS/CFT megfeleléssel ellentétben ugyanis a fenti területek közötti kapcsolatot még nem sikerült precíz matematikai formába önteni, és egyelőre szerteágazó lehetséges fizikai alkalmazásokról sem beszélhetünk. Az elmúlt évtized során viszont három különböző csoport munkájának köszönhetően, sikerült a megfelelést érintő területeken egy precíz szótárat kidolgozni [BDD⁺09c, BDL12]. A FLYQM-nek köszönhetően mindkét terület új eredményekkel gazdagodott, melyeket a másik terület matematikai módszerei tették elérhetővé.

Például a négy-qubit rendszerek SLOCC összefonódottsági osztályainak precíz jellemzése húrelméleti módszerek bevetésével vált lehetővé [BDD⁺10], miután kiderült, hogy az extrémális STU fekete lyuk megoldások klasszifikációjának problémája a nilpotens négy-qubit SLOCC osztályok problémájának felel meg [8]. Másrészt, összefonódottság elméleti módszerek felhasználásával vált világossá, hogy négy dimenzióra történő tórusz kompaktifikációk esetén a legáltalánosabb extrémális fekete lyuk megoldások osztályban nem egy, hanem hét STU rész-szektor található [5, DF07b], melyek töltéskonfigurációit a 168 elemű Klein csoport elemei kötik össze. A Klein csoport hetedrendű generátorát mely a hét szektor között forgat, a kvantum információelméletből ismert összefonódottságot generáló három qubit CNOT kapuk segítségével elegáns módon

felírhatjuk [13]. Az irodalomban ezidáig ismeretlen hétszeres STU csonkításnak kozmológiai alkalmazását illetően lásd Ferrara és Kallosh 2016-os dolgozatát [FK16].

Már ezekből a példákból is kiderül, hogy a FLYQM egyszerű összefonódott rendszerek geometriai tulajdonságaival áll kapcsolatban. Ez a jellemvonás a FLYQM valamennyi ismert esetében igaz. Ez a tény ezt az igen érdekes területet a dolgozat első feléhez köti. A dolgozat második részében, (az első rész szellemében) tárgyalásra kerülő eredmények azt mutatják, hogy a két különböző területen bizonyos fontos esetekben hasonló szimmetria és algebrai geometriai struktúrák bukkannak fel. Ennek megfelelően a dolgozat ezen részében a FLYQM-t illetően az alábbi pragmatikus megközelítést fogadjuk el: a FLYQM oka tisztán strukturális természetű. Tehát a két különböző terület között talált megfelelések nem feltétlenül utalnak egy mélyebb fizikai kapcsolat meglétére⁵. Ez a megközelítés a megfelelés mélyebb okainak firtatása helyett arra sarkall, hogy inkább azt használjuk. Ez az *egyik* területen kifejlesztett ábrázolás és invariánselméleti technikák felhasználását jelenti arra, hogy mélyebb belátást nyerhessünk a *másik* terület matematikai szerkezetébe.

A pragmatikus filozófiánk alkalmazása ellenére látni fogjuk, hogy a FLYQM igen szuggesztív. Reményeink szerint a dolgozat második felének tanulmányozása során sikerül majd az Olvasóban némi rokonszenvet kelteni azon lehetőség iránt, hogy a FLYQM matematikai megfelelései egy egységesítő fizikai alapelv működésére is utalhatnak. Különösen vonzó lehetőség a FLYQM kapcsán felbukkanó ötletek és a Holografikus Elv esetleges kapcsolatának további kutatás során történő feltárása. Amennyiben ez a kapcsolat valóban létezik, az a FLYQM-t a fejezet elején említett fizikai szempontból is érdekes dualitások közé emelné. A Szerző ezzel kapcsolatos vélekedését a dolgozat utolsó fejezete tartalmazza.

1.3. A dolgozat felépítéséről és az összefonódottság szerepéről

A dolgozat fő szereplője a kvantumos összefonódottság. Vizsgálódásaink első részében, a kvantum információelmélet szokásos szellemében, az összefonódottsággal kapcsolatos ismereteinket ennek az új, hatékony *erőforrásnak* a geometriájának a feltérképezésére használjuk. A dolgozat második felében az összefonódottsággal kapcsolatos filozófiánk megváltozik. Itt az összefonódottsággal kapcsolatos ismereteink rendszerét mint egy új *nyelvet* fogjuk fel, melynek segítségével újragondolhatjuk egy másik területtel (húrelméleti fekete lyuk megoldások) kapcsolatos ismereteinket.

A dolgozatban a tézispontokkal kapcsolatos eredmények kifejtésén túl jóval több anyag helyet kapott. Véleményünk szerint ugyanis, a tézispontokkal kapcsolatos háttérinformációk rövid összefoglalása jelentősen megkönnyíti a főbb gondolatok megértését. A bevett szokással ellentétben ezeket a részeket nem számúztuk függelék formájában a dolgozat végére, hanem inkább a gondolatmenet szerves részeként a szövegbe építettük. Így például a dolgozat tartalmazza a IIB típusú húrelmélet, FLYQM-hez szükséges elemeit. Az egyes tézispontokkal kapcsolatos fontosabb állításokat és bizonyításukat a matematikus Definíció-Tétel-Bizonyítás sémával ellentétben a fizikus hagyományoknak megfelelően, szintén a szövegbe építettük. Az egyéb, a dolgozatban nem részletezett bizonyításokat az Olvasó a tézispontokkal kapcsolatos publikációkban találhatja meg.

A dolgozat két fő részre való bontása nemcsak a Szerző munkásságának hanem az összefonódottság történetének útját is tükrözi. A kvantum információelmélet lényegében az 1990-es évek közepén a Shor algoritmus⁶ és más kvantum algoritmusok megjelenésének idején került be a

⁵ A FLYQM megfelelései óvatosságra és fent említett pragmatikus nézőpont elfogadására intenek. Egy jólismert hasonlat szerint ugyanis akinek csak egy kalapács áll a rendelkezésére az hajlamos a világot kilógó szegek együttesének tekinteni.

⁶ Amennyiben a kvantumszámítógépet megépítenénk a rajta futó Shor algoritmus [Sho99] egy összetett természetes számot polinomiális idő alatt bontana prímtényezőire.

köztudatba. Ezek az eredmények a kvantumos összefonódottság *erőforrás* jellegére irányították a figyelmet. Ennek megfelelően a terület fejlődésének első évtizedében a kvantum információ-elmélettel kapcsolatos elsődleges törekvések a kvantumszámítógépek megépítésének ideája köré csoportosultak.

A későbbi felfedezések azonban, mint például a kvantum teleportáció jelensége [BBC⁺93], a kvantumelmélet alapkérdéseinek összefonódottság elméleten alapuló újragondolására is készíteték a kutatókat [DH00]. Egy, az ebből az időből származó elgondolás szerint, mely a kvantum parallelizmus [Deu85] ötletének atyjától David Deutschól származik, már a kvantumelmélet alapszintű oktatását is a kvantum algoritmusok és a kvantumos összefonódottság irányából kellene megközelíteni.

Ezzel párhuzamosan a kvantumszámításon kívüli egyéb érdekes alkalmazások robbanásszerű elterjedését figyelhettük meg. Az összefonódottság elméleti módszerek behatoltak a szilárdtest-fizikus, a kvantumkémikus, az atom és molekula fizikus eszköztárába. Paradox módon a nagy-energiás fizika (részecskefizika, téridő-fizika, húrelmélet stb.) az összefonódottság elmélet által produkált kihívásokra viszonylag későn reagált. 2005-ben például a nagyenergiás elméleti fizikai archívumban (arXiv: hep-th) mindössze 22 olyan cikket találunk, melynek címében az "entanglement" szó szerepel. 2015-ben ugyanez a szám már 220. Mi történt tehát a közben eltelt 10 évben?

Sejtésünk szerint az összefonódottsággal kapcsolatos ismereteinket a kutatók fokozatosan egy olyan új *nyelvként* kezdték használni, melynek segítségével mélyebb bepillantást nyerhetünk a fent felsorolt területek egyes fizikai problémáiba. Tágabb értelemben ez a nyelv a kvantum információelmélet fogalmi apparátusának egyfajta univerzalitását sejteti.

A nagyenergiájú fizikában az érdeklődés növekedtét a Ryu-Takayanagi páros holografikus összefonódottsági entrópiával [RT06] illetve a Duff-Kallos-Linde trió FLYQM-vel kapcsolatos vizsgálatainak [Duf07, KL06] 2006 elején történő megjelenésével hozhatjuk kapcsolatba. Sajnos a FLYQM-vel kapcsolatos érdeklődés három csoport tevékenységétől eltekintve hamar elült. Az ok: az elkövetkező néhány évben nem sikerült a megfelelés esetleges fizikai alapjait tisztázni. A "kvantum összefonódottság/téridő geometria" témakörben azonban az úgynevezett Ryu-Takayanagi (RT) formula [RT06] alapvető áttörést hozott. Az ok: a RT-formula a már húsz éve az érdeklődés homlokterében álló és számos területen igazolt AdS/CFT megfelelés logikus továbbgondolásából született, kiemelkedő fontosságú eredmény.

Érdemes azonban hangsúlyozni, hogy a többrétegzett összefonódottsági mértékek, és a hibajavító kódok fekete-lyuk entrópiával való⁷ kapcsolata először a FLYQM kontextusában jelent meg 2007-ban [5, 6]. Hasonló (de fizikailag jóval megalapozottabb) eredmények a RT-formula kontextusában csak jóval később [VV13, PYHP15], 2013-tól bukkantak fel. 2016-ban a Simons Foundation szponzorálásában az "It from Qubit" program⁸ beindulásával a kvantum információ-elmélet és a téridő-fizika/kvantumgravitáció területén dolgozó fizikusok közös projektbe történő összehangolása már azt jelzi, hogy a két területet valóban az összefonódottság elméletének *nyelve* köti össze. Ezzel egy, az eredetileg a FLYQM által már 2006-ban felvetett lehetőség valósult meg [KL06, 4] egy sokkal grandiózusabb és kevésbé ad hoc feltételezéseken alapuló projekt keretében.

Jelenleg a területen a FLYQM kevésbé ismert. A FLYQM eredményeinek dolgozatbeli összefoglalása azt a célt is szolgálja, hogy megteremtse annak a lehetőségét, hogy a jelenleg folyó

⁷Megjegyezzük, hogy ennek a kapcsolatnak a formális és meglehetősen ad hoc jellege részben indokolja azt, hogy az eredmény kevésbé ismert.

⁸John Wheeler híres ötlete ("It from Bit") nyomán az Univerzum minden jelenségét ("It") információelméleti alapokra ("Bit") kellene tudnunk helyezni. A projekt nevét szellemesen "It from Qubit"-re módosították annak megfelelően, hogy időközben tudásunk gyarapodásának köszönhetően az "információelmélet" szó helyesebben "kvantum információelmélet"-re módosult.

kutatás új eredményeinek segítségével ezt az igen érdekes területet az "It from Qubit" program szellemi áramlatához csatolja.

2. FEJEZET

Egyszerű összefonódott qubit rendszerek geometriája

2.1. Két megkülönböztethető részrendszerből álló rendszerek

2.1.1. Schmidt dekompozíció és von-Neumann entrópia . Tekintsünk két *megkülönböztethető kvantumrendszert*. Legyenek ezek a rendszerek A és B . Tegyük fel továbbá, hogy A és B bizonyos ideig kölcsönhatásban álltak és ennek eredményeképpen egy AB összetett rendszer jött létre. A keletkezett AB rendszert fizikai tulajdonságok egy teljes rendszerével jellemezhetjük. Ha a fenti teljes rendszerrel az A és B részrendszereket is jellemezhetjük akkor az AB rendszert *szeparálhatónak* nevezzük. Ha ilyen jellemzés nem tehető meg akkor AB *összefonódott*.

A kvantumelmélet axiómái szerint a tulajdonságok teljes rendszerét kommutáló önadjungált operátorok teljes rendszerével reprezentálhatjuk. Ezek a *megkülönböztethető* részrendszerekből álló kvantumrendszer állapotait reprezentáló $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ Hilbert téren hatnak. Ekkor megmutatható, hogy *tiszta állapotok* esetén a szeparálhatóság fenti definíciója megfelel a $|\Psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_{AB}$ hullámfüggvény szeparálhatóságának [GM04, GW02].

A hullámfüggvény szeparálhatósága véges dimenziós $\mathcal{H}_A \equiv \mathbb{C}^M$ és $\mathcal{H}_B \equiv \mathbb{C}^N$ esetén az alábbi módon jellemezhető. Egy tetszőleges tiszta állapotban lévő AB rendszer fizikai állapotát a

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{a=1}^M \sum_{b=1}^N \Psi_{ab} |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (2.1)$$

vektorral reprezentálhatjuk. Itt $|a\rangle_A$ és $|b\rangle_B$ ortonormált bázisvektorok. Ha találhatunk olyan $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ és $|\varphi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$ állapotvektorokat melyekre

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B \quad (2.2)$$

akkor az AB rendszer szeparálható.

Hogyan dönthetjük el, hogy egy tetszőleges $|\Psi\rangle_{AB}$ állapot szeparálható vagy összefonódott? Jó lenne azt is tudni, hogy két részrendszer összefonására milyen lehetőségeink vannak. Ez az összefonódottság bizonyos kritériumok alapján történő klasszifikációjának problémája.

Két részrendszer esetén a fenti kérdések a Schmidt dekompozíció [NC00, BŻ06] segítségével válaszolhatók meg. Az $M \times N$ -es Ψ_{ab} mátrix szinguláris érték dekompozíciójával olyan új $|i\rangle_A$ és $|i\rangle_B$ bázisvektorok találhatók melyekkel írható, hogy

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{n_\Psi} r_i |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B \quad (2.3)$$

Az $r_i, i = 1, 2, \dots, n_\Psi \leq \min\{M, N\}$ pozitív valós számok a $|\Psi\rangle$ állapot ún. Schmidt együtthatói. A Schmidt dekompozíció alapján a feltett kérdésre a válasz: ha a nemzérus Schmidt együtthatók száma nagyobb mint egy akkor $|\Psi\rangle_{AB}$ összefonódott, különben szeparálható.

A Schmidt dekompozíció jelentésének megértését megkönnyíti a redukált sűrűségmátrix (marginális) fogalmának bevezetése. A $|\Psi\rangle$ tiszta állapotnak megfelelő sűrűségmátrix alakja $|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Ekkor a részrendszereknek megfelelő marginálisok

$$\varrho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad \varrho_B = \text{Tr}_A |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (2.4)$$

ahol $\text{Tr}_{A,B}$ a megfelelő részrendszer szerinti parciális átlósösszeg képzését jelenti. Ekkor

$$\varrho_{Aaa'} = (\Psi\Psi^\dagger)_{aa'}, \quad \bar{\varrho}_{Bbb'} = (\Psi^\dagger\Psi)_{bb'} \quad (2.5)$$

ahol felülhúzással a komplex konjugálást jelöltük.

A fenti alakból láthatóan a ϱ_A és ϱ_B mátrixok nemzéró sajátértékei (λ_i) azonosak és pozitívak. Továbbá ezen sajátértékek száma $\min\{M, N\}$ azaz egyenlő a Schmidt együtthatók számával. Nyilván $r_i = \sqrt{\lambda_i}$. Az $|i\rangle_A$ és $|i\rangle_B$ Schmidt bázisvektorok a ϱ_A and ϱ_B mátrixok közös λ_i sajátértékeihez tartozó sajátvektorai. Jelölje $U \in U(M)$ és $V \in U(N)$ azon unitér mátrixokat melyek a megfelelő marginálisokat diagonalizálják. Ekkor a Schmidt alakba történő transzformáció megfelel a

$$|\Psi\rangle \mapsto U \otimes V |\Psi\rangle, \quad U \otimes V \in U(M) \times U(N) \quad (2.6)$$

lokális unitér transzformációnak. A fenti transzformáció mátrix alakja

$$\Psi_{ab} \mapsto (U\Psi V^T)_{ab} \quad (2.7)$$

ahol U és Ψ $M \times M$ -es illetve $M \times N$ -es mátrixok és V^T az $N \times N$ -es mátrix transzponáltja.

A fentiekből következik, hogy $|\Psi\rangle$ összefonódott akkor és csak akkor ha a ϱ_A és ϱ_B redukált sűrűségmátrixok kevert állapotokat reprezentálnak. (Ezen mátrixok rangja nagyobb mint egy.) Hasonlóan $|\Psi\rangle$ szeparálható akkor és csak akkor ha ϱ_A és ϱ_B tiszta állapotokat reprezentálnak. (Ekkor a megfelelő mátrixok egy rangú projektorok.) Tudjuk azt is, hogy a ϱ_A (ϱ_B) mátrixok rangja és sajátértékei nem változnak további $U(M)$ ($U(N)$) transzformációk során. Ezért a két megkülönböztethető részrendszerből álló rendszerek összefonódottsági tulajdonságai nem változnak az $U(M) \times U(N)$ lokális unitér transzformációk során.

Az elmondottak alapján célszerű definiálni a *lokális unitér* (LU) ekvivalencia fogalmát. Azt mondjuk, hogy $|\Phi\rangle \sim_{LU} |\Psi\rangle$ azaz $|\Phi\rangle$ lokális unitér ekvivalens $|\Psi\rangle$ -vel ha létezik olyan $\mathcal{U} \in U(M)$ és $\mathcal{V} \in U(N)$ mely $|\Psi\rangle$ -t $|\Phi\rangle$ -be viszi. Képletben

$$|\Phi\rangle \sim_{LU} |\Psi\rangle \leftrightarrow |\Phi\rangle = \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} |\Psi\rangle, \quad \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \in U(M) \times U(N) \quad (2.8)$$

A fenti módszerrel konstruált ekvivalenciaosztályok a LU-összefonódottsági osztályok. Nyilvánvaló, hogy amennyiben a $|\Phi\rangle$ és $|\Psi\rangle$ állapotok Schmidt rangja különböző a két állapot különböző LU-osztályban van. Azonban ha a fenti két állapotra a Schmidt rang ugyan azonos, de $\lambda_i^\Phi \neq \lambda_i^\Psi$ akkor a két állapot ismét két különböző LU-osztályban van. Az $r_i = \sqrt{\lambda_i}$ Schmidt együtthatók konkrét értéke tehát a LU osztályok egy finomabb jellemzését teszi lehetővé. Könnyű belátni, hogy $|\Phi\rangle$ és $|\Psi\rangle$ pontosan akkor van ugyanabban az LU osztályban ha a megfelelő Schmidt együtthatók megegyeznek.

Célszerű még bevezetni a *Schmidt vektor* fogalmát. Ez egy olyan $\max(M, N)$ komponensű vektor melynek első $\min(M, N)$ komponense a λ_i nemzérus sajátértékekből áll nem növekvő sorrendben. A fennmaradó komponensek zérusok.

A Schmidt vektor ismeretében hogyan számszerűsíthetjük az összefonódottságot? Milyen összefonódottsági mértékeket célszerű bevezetni?

A két részrendszeres összefonódottság jellemzésére a legismertebb mérték a von-Neumann entrópia [OP93] $S(\Psi)$. Definíciója

$$S(\Psi) = -\text{Tr } \varrho_A \log_2 \varrho_A = -\text{Tr } \varrho_B \log_2 \varrho_B = - \sum_{i=1}^{\min\{M, N\}} \lambda_i \log_2 \lambda_i \quad (2.9)$$

Alternatív összefonódottsági mértékeket adnak még a Rényi entrópiák [OP93]. Mivel ϱ_A és ϱ_B nemzérus sajátértékei megegyeznek ezért a továbbiakban ϱ alsó indexét elhagyjuk. Ekkor a Rényi entrópiák definíciója az alábbi

$$S_\alpha(\Psi) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \text{Tr } \varrho^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Vegyük észre, hogy $\lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha(\Psi) = S(\Psi)$. A két részrendszeres összefonódottság jellemzésére az irodalomban gyakran a $\text{Tr } \varrho^\alpha$, $\alpha = 2, 3, \dots$ mennyiségeket is használják. Egy $N \times N$ -es sűrűségmátrix jellemzésére különösen fontos mennyiség az ún. *konkurrencia* négyzete

$$C^2 = \frac{N}{N-1} (1 - \text{Tr } \varrho^2) \quad (2.11)$$

Mivel tiszta állapotok esetén $\varrho^2 = \varrho$, és $\text{Tr } \varrho = 1$ ezért amennyiben ϱ előáll mint egy $|\Psi\rangle$ tiszta állapot redukált sűrűségmátrixa a konkurrencia pontosan akkor zérus ha $|\Psi\rangle$ szeparálható.

2.1.2. Összefonódottsági osztályok . Az előző fejezetben feltettük, hogy a két részrendszer A és B a korábbiakban kölcsönhatásban álltak. Ha az AB teljes rendszert elszigeteltnek gondoljuk el akkor a véges dimenziós esetben ezt a kölcsönhatási folyamatot egy $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ -n ható $U \in U(MN)$ unitér transzformáció reprezentálja. Ha A és B korábban szeparáltak voltak akkor ez a *globális unitér* transzformáció felelős a részrendszerek közötti összefonódottság megjelenéséért. Ezzel szemben az ezt követő $U \otimes V \in U(M) \times U(N)$ alakú *lokális unitér* transzformációk már nem változtatják meg ezt a LU ekvivalenciaosztályokkal reprezentált összefonódottságot. A kvantum információelméletben ezek az utóbbi transzformációk a megfelelő részrendszereken történő valódi lokális manipulációkat reprezentálnak.

A kvantum információelméletben azonban a szokásos protokollok olyan lokális manipulációkat is megengednek melyek nem szorítkoznak csupán unitér operátorok alkalmazására. Ilyenek például az egymástól nagy távolságra lévő -de kvantumosan mégis összefonódott- A és B nagyobb lokális környezetekbe történő beágyazásai. Ezek az új környezetekkel ellátott részrendszereken általánosított mérések végezhetők. Továbbá ugyan a továbbiakban globális kvantum manipulációkat már nem engedünk meg, de még megengedhetünk A és B között *klasszikus kommunikációt*. Ilyen lehet például az egyes részrendszerekkel kapcsolatos általánosított mérések eredményeinek továbbítása a másik fél számára postagalamb útján. A másik mérési eredményeinek ismeretében a felek további lokális manipulációkat végezhetnek, és így tovább. Az ilyen klasszikus kommunikációval kiegészített lokális manipulációkat az angol rövidítésnek megfelelően LOCC transzformációknak fogjuk hívni. (Local Operations and Classical Communication.)

A kvantum információelméletben fontos kérdés annak eldöntése mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy $|\Phi\rangle$ összefonódott állapotot egy másik $|\Psi\rangle$ állapotba tudjunk transzformálni LOCC transzformációk segítségével. Legyenek λ^Ψ és λ^Φ a két állapotnak megfelelő Schmidt vektorok. (Emlékeztetünk arra, hogy $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$. Itt a vektorok komponenseinek száma $d \equiv \max\{M, N\}$ alkalmas számú zérussal feltöltve.) Azt mondjuk, hogy a λ^Ψ vektor majorizálja a λ^Φ vektort, képletben $\lambda^\Phi \prec \lambda^\Psi$, ha

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^\Phi \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i^\Psi, \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (2.12)$$

ahol $k = d$ esetén egyenlőség értendő. Ekkor $|\Phi\rangle$ LOCC transzformálható $|\Psi\rangle$ -be akkor és csak akkor ha a λ^Ψ Schmidt vektor majorizálja a λ^Φ vektort [Nie99]. A majorizálási tétel alapján könnyen belátható, hogy $|\Psi\rangle$ and $|\Phi\rangle$ *kölcsönösen egymásbaalakítható* LOCC transzformációkkal ha a megfelelő Schmidt vektorok megegyeznek. Ekkor a két állapot lokálisan ekvivalens azaz LU ekvivalens [BPR⁺00]. Ennek megfelelően a LOCC ekvivalenciát az alábbi módon is megfogalmazhatjuk

$$|\Phi\rangle \sim_{LOCC} |\Psi\rangle \leftrightarrow |\Phi\rangle = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} |\Psi\rangle, \quad \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \in U(M) \times U(N) \quad (2.13)$$

A LOCC transzformációkon túl a kvantumos összefonódottság vizsgálata során szükségesnek bizonyult a transzformációk egy újabb típusának bevezetése. Ezek a transzformációk olyan

protokollokat reprezentálnak melyek során $|\Psi\rangle$ átalakítható $|\Phi\rangle$ -be de csak bizonyos valószínűséggel [DVC00]. Ilyen eset valósul meg akkor amikor bizonyos általánosított mérések eredményeként kapott kvantum állapotokat egyszerűen figyelmen kívül hagyunk. Az állapotok ilyen manipulációját az $\text{End}(\mathcal{H}_A) \times \text{End}(\mathcal{H}_B)$ alakú lineáris leképezések realizálják. Az ilyen alakú transzformációk alkotják a *sztochasztikus* LOCC röviden SLOCC transzformációk *félcsoportját* [Vra11a]. Azt mondjuk, hogy a $|\Psi\rangle$ állapot valamilyen nemzérus valószínűséggel átalakítható a $|\Phi\rangle$ állapotba SLOCC félcsoport transzformációkkal ha találhatók olyan $\mathcal{A} \in \text{End}(\mathcal{H}_B)$, és $\mathcal{B} \in \text{End}(\mathcal{H}_B)$ leképezések melyekre $|\Phi\rangle = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}|\Psi\rangle$. A SLOCC félcsoport transzformációkkal *kölcsönösen* egymásba alakítható állapotokat SLOCC ekvivalens állapotoknak nevezzük. A két különböző irányba történő konverzió valószínűségei általában különbözőek. Megmutatható, hogy az ilyen transzformációkat lokális invertálható mátrixok reprezentálják. Ezek a transzformációk a $GL(M, \mathbb{C}) \times GL(N, \mathbb{C})$ SLOCC *csoportot* alkotják, és az állapotok normáját nem őrzik. Ennek alapján a SLOCC ekvivalencia formális definíciója az alábbi [DVC00]

$$|\Phi\rangle \sim_{\text{SLOCC}} |\Psi\rangle \leftrightarrow |\Phi\rangle = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}|\Psi\rangle, \quad \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \in GL(M, \mathbb{C}) \times GL(N, \mathbb{C}) \quad (2.14)$$

A fentiek szerint az összefonódottsági osztályoknak két fajtáját célszerű megkülönböztetnünk. Ezek a (2.8) LU és a (2.14) SLOCC ekvivalenciaosztályok. Mivel a SLOCC csoport dimenziója nagyobb ezért ebben az esetben kevesebb összefonódottsági osztályt kapunk. Több részrendszeres összefonódottságnál látni fogjuk, hogy alacsony dimenziós rendszereknél a SLOCC osztályok száma véges is lehet. A SLOCC osztályok az összefonódottságnak egy durvább a LU csoport pedig egy finomabb klasszifikációját adják.

Határozzuk meg az LU és SLOCC összefonódottsági osztályokat két véges részrendszer esetén! Már tudjuk, hogy a finomabb LU klasszifikálás szerint kontinuum sok összefonódottsági osztályunk van melyeket a λ Schmidt vektorok nem zérus komponensei indexelnek. Könnyű belátni [DVC00] hogy ezzel szemben a SLOCC osztályok száma véges és pedig megegyezik a nemzérus Schmidt együtthatók számával azaz a Schmidt ranggal, $n_\Psi \leq \min\{M, N\}$ -vel. A nem invertálható SLOCC félcsoport csökkenti a Schmidt rangot tehát a $|\Psi\rangle$ nem zérus valószínűséggel lokálisan átalakítható $|\Phi\rangle$ -be akkor és csak akkor ha $n_\Psi \geq n_\Phi$.

Milyen összefonódottsági mértékekkel jellemezhetők a fenti osztályok? Mindkét esetben az összefonódottsági mértékeket célszerű az állapotok együtthatóiban (illetve LU esetén az együtthatókban és a komplex konjugált együtthatókban) invariáns polinomok körében keresni. Ezek a polinom invariánsok konstans értéket vesznek fel a csoporthatás pályáin azaz az összefonódottsági osztályokon. Jóllehet ezek az invariáns polinomok általában nem különítik el az összes pályát egymástól, mégis nagyon fontos betekintést nyújtanak az összefonódottsági osztályok szerkezetébe. Ilyen polinominvariánsokra láthatunk példákat a következő fejezetekben. A LU invariánsok általános matematikai szerkezete iránt érdeklődő Olvasónak PHD hallgatóim Vrana Péter és Szalay Szilárd munkáinak tanulmányozását javaslom [Vra11a, Vra11b, Vra11c, Sza11, SK12, Sza12].)

2.2. Két-qubit rendszerek

2.2.1. Konkurencia és Schmidt dekompozíció . A legegyszerűbb két részrendszeres összefonódott rendszer két qubitből áll. Ekkor $\mathcal{H}_A \simeq \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$ és a (2.1)-ben szereplő Ψ_{ab} egy 2×2 -es komplex elemű mátrix

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b=0,1} \Psi_{ab}|ab\rangle, \quad |ab\rangle \equiv |a\rangle \otimes |b\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \quad (2.15)$$

A két qubites összefonódottság egy lehetséges mértéke a (2.11)-ben definiált konkurencia négyzet. Mivel 2×2 -es mátrixokra $(\text{Tr } M)^2 - \text{Tr } M^2 = 2 \text{Det } M$ ezért (2.4) és (2.5) felhasználásával

kapjuk

$$\mathcal{C}^2 = 4 \text{Det } \varrho_A = 4 \text{Det } \varrho_B = |2 \text{Det } \Psi|^2 \quad (2.16)$$

Normált állapotokra könnyen látható, hogy

$$0 \leq \mathcal{C}(\Psi) = 2 |\text{Det } \Psi| \leq 1 \quad (2.17)$$

Szeperálható állapotokra mint például a

$$\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (2.18)$$

a konkurrencia zérus, $\mathcal{C} = 0$. *Maximálisan összefonódott*, állapotokra mint például a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad (2.19)$$

Bell-állapot, $\mathcal{C} = 1$. Vegyük észre hogy az első esetben

$$\varrho_A = \varrho_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

s így $\varrho^2 = \varrho$ azaz a marginálisok tiszta állapotok (projektorok). A második esetben

$$\varrho_A = \varrho_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

azaz a marginálisok maximálisan kevert állapotok. A marginálisok diagonalizálásával kapjuk, hogy a (2.3)-ban szereplő Schmidt együtthatók

$$r_{\pm} = \sqrt{\lambda_{\pm}}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \mathcal{C}(\Psi)^2} \right) \quad (2.22)$$

és a von-Neumann entrópia

$$0 \leq S(\Psi) = -\lambda_+ \log_2 \lambda_+ - \lambda_- \log_2 \lambda_- \leq 1 \quad (2.23)$$

Mivel az $U(2) \times U(2)$ lokális unitér csoporttal szemben a Ψ mátrix $\Psi \mapsto U\Psi V^T$ módon transzformálódik ezért a $\mathcal{C} = 2 |\text{Det } \Psi|$ konkurrencia LU invariáns. Ebből fakadóan a von-Neumann és Rényi entrópiák is LU invariánsok.

A konkurrencia azonban nem SLOCC invariáns. Ugyanis $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \in GL(2, \mathbb{C}) \times GL(2, \mathbb{C})$ esetén

$$|\Psi\rangle \mapsto \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} |\Psi\rangle \Rightarrow \mathcal{C}(\Psi) \mapsto |\text{Det}(\mathcal{M}\mathcal{N})| \mathcal{C}(\Psi). \quad (2.24)$$

Figyeljük meg, hogy a (2.24) formulában az extra faktor a SLOCC csoport karaktere (egydimenziós ábrázolása). Ekkor azt mondjuk, hogy a konkurrencia a SLOCC csoporttal szemben egy *relatív invariáns*. Természetesen a SLOCC csoport $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ alcsoportjára nézve a konkurrencia invariáns. A SLOCC csoport matematikai szerkezete tehát $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$, ahol $\mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} - \{0\}$. Az utolsó faktor az állapotvektor nemzérus komplex számmal való ujraskálázásának felel meg.

Mivel $r_+^2 + r_-^2 = 1$ egy két qubit állapot kanonikus Schmidt dekomponált alakja

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\tilde{0}\tilde{0}\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |\tilde{1}\tilde{1}\rangle \quad (2.25)$$

Itt $|\tilde{0}\rangle$ és $|\tilde{1}\rangle$ a Schmidt dekompozícióval kapható ortonormált bázisvektorok. A θ paraméter és a konkurrencia kapcsolata

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \mathcal{C}^2}). \quad (2.26)$$

A (2.22) egyenlet alapján $\theta \in [0, \pi/2]$, szeperálható állapotokra $\theta = 0$, míg maximálisan összefonódott állapotokra $\theta = \pi/2$. Láthatóan θ minden megengedhető értékének egy LU osztály felel meg. Tehát kontinuum sok LU összefonódottsági osztályunk van.

Másrészt mivel a SLOCC transzformációk megváltoztatják a konkurrencia értékét ezért mindössze *kettő* SLOCC osztály van. A SLOCC szeparálható osztály $\mathcal{C} = 0$, és a SLOCC összefonódott osztály $\mathcal{C} \neq 0$ értékekkel. Az előbbi osztály reprezentánsa a $|00\rangle$ az utóbbié a $|00\rangle + |11\rangle$ állapot. (A SLOCC esetben a normáltsággal nem kell foglalkoznunk hiszen ezek a transzformációk nem őrzik a normát.)

2.2.2. A két qubites összefonódottság geometriája [1, 19]. A két qubitből álló rendszer geometriájának vizsgálata hasznos támpontot ad több részrendszerből álló rendszerek későbbi vizsgálatához. Az összefonódott állapotok geometriájával kapcsolatban számos fontos munka jelent meg [BŽ06, BH01, KasidZ01a, BŽ02]. A következőkben mi a Mosseri és Dandoloff [MD01] által kezdeményezett megközelítést tekintjük irányadónak. Itt ennek a tárgyalásnak az [1, 19]-ben továbbfejlesztett változatát ismertetjük.

Parametrizáljuk a (2.15)-ben megjelenő komplex mátrixot az alábbi módon

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_0 + iQ_1), \quad Q_0 = \alpha_0 I - i\alpha_j \sigma_j, \quad Q_1 \equiv \beta_0 I - i\beta_j \sigma_j \quad (2.27)$$

ahol a σ_j -k $j = 1, 2, 3$ a szokásos Pauli mátrixok és α_μ, β_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ valós számok. Mivel $|\Psi\rangle$ normált ezért $Q_0 Q_0^\dagger + Q_1 Q_1^\dagger = I$, $\alpha_\mu \alpha^\mu + \beta_\mu \beta^\mu = 1$ így a normált állapotok tere S^7 a 7 dimenziós gömb. Ekkor a marginálisok

$$\varrho_A = \Psi \Psi^\dagger = \frac{1}{2}(I + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\varrho}_B = \Psi^\dagger \Psi = \frac{1}{2}(I + \mathbf{y}\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.28)$$

ezért

$$-i\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma} = Q_1 Q_0^\dagger - Q_0 Q_1^\dagger, \quad -i\mathbf{y}\boldsymbol{\sigma} = Q_0^\dagger Q_1 - Q_1^\dagger Q_0 \quad (2.29)$$

Vezessünk be még két mennyiséget

$$x_0 I = Q_1 Q_0^\dagger + Q_0 Q_1^\dagger, \quad y_0 I = Q_0^\dagger Q_1 + Q_1^\dagger Q_0 \quad (2.30)$$

Tekintsük még az alábbi mennyiségeket

$$x_4 I = Q_0 Q_0^\dagger - Q_1 Q_1^\dagger, \quad y_4 I = Q_0^\dagger Q_0 - Q_1^\dagger Q_1 \quad (2.31)$$

Az explicit kifejezések

$$x_0 = y_0 = 2\alpha_\mu \beta^\mu, \quad x_4 = y_4 = \alpha_\mu \alpha^\mu - \beta_\mu \beta^\mu, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{x} = \alpha_0 \boldsymbol{\beta} - \beta_0 \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{y} = \alpha_0 \boldsymbol{\beta} - \beta_0 \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \quad (2.33)$$

Könnyen belátható, hogy

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, \quad y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1 \quad (2.34)$$

azaz $x, y \in S^4$ tehát x és y egy-egy pontot határoznak meg a 4 dimenziós gömbfelületen. Ezek a megfontolások két leképezés bevezetését indokolják

$$\pi_A : S^7 \longrightarrow S^4, \quad X = 2Q_1 Q_0^\dagger, \quad x_4 I = Q_0 Q_0^\dagger - Q_1 Q_1^\dagger \quad (2.35)$$

$$\pi_B : S^7 \longrightarrow S^4, \quad Y = 2Q_0^\dagger Q_1, \quad y_4 I = Q_0^\dagger Q_0 - Q_1^\dagger Q_1 \quad (2.36)$$

ahol

$$X \equiv x_0 I - i\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma}, \quad Y \equiv y_0 I - i\mathbf{y}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.37)$$

A (2.6) transzformációs szabályból láthatóan lokális unitér $U(2) \times U(2) \simeq SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ transzformációk során $\Psi \mapsto U\Psi V^T$ ahol feltehetjük, hogy a relatív $U(1)$ fázisfaktor vagy a jobb vagy a baloldali $SU(2)$ mátrixot szorozza. Legyen most $U \in U(2)$ és $V^T \in SU(2)$! Ha csak Bob qubitjén hajtunk végre egy $I \otimes V$ lokális $SU(2)$ transzformációt akkor

$$(Q_0, Q_1) \mapsto (Q_0 V^T, Q_1 V^T), \quad V^T \in SU(2) \quad (2.38)$$

Az ilyen alakú transzformációkat a (2.35) leképezés nem veszi észre hiszen az eredeti és a transzformált összefonódott állapot is ugyanabba az $x \in S^4$ pontba képeződik. Mivel $SU(2) \simeq S^3$ ezért a π_A leképezés egy olyan fibrált nyaláb projekciója melynek a bázistere S^4 a nyaláb tere S^7 és a fibrum S^3 . Hasonlóan látható be az, hogy a π_B leképezés "nem érzékeli" azokat a

$$(Q_0, Q_1) \mapsto (UQ_0, UQ_1), \quad U \in SU(2) \quad (2.39)$$

transzformációkat melyek az Alice qubitjén történő lokális $U \otimes I$ unitér manipulációknak felelnek meg. A π_B leképezés egy másik fibrált nyalábot határoz meg, mely szintén különböző dimenzós gömbök segítségével áll elő.

Megmutatható, hogy a (2.35) és (2.36) leképezések a második (kvaterniós) Hopf fibrálásokat adják [Min80]. Valóban ha a szokásos kvaterniőalgebrát az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ szimbólumok generálják ahol $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$ és $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$ stb. akkor egy tetszőleges kvaternió $q \in \mathbb{H}$ felírható a $q = q_0\mathbf{1} + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ alakban. A konjugált kvaterniót és a kvaternió normáját a $\bar{q} = q_0\mathbf{1} - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$ és $|q| = \sqrt{\bar{q}q}$ képletekkel értelmezzük. A $\Re(q) \equiv \frac{1}{2}(q + \bar{q})$ és a $\Im(q) \equiv \frac{1}{2}(q - \bar{q})$ definíciók a q kvaternió valós és képzetes részét adják. Ekkor a

$$\mathbf{1} \leftrightarrow I, \quad \mathbf{i} \leftrightarrow -i\sigma_1, \quad \mathbf{j} \leftrightarrow -i\sigma_2, \quad \mathbf{k} \leftrightarrow -i\sigma_3 \quad (2.40)$$

megfeleltetés a kvaterniőalgebra 2×2 -es mátrixábrázolását adja. Minden q kvaterniónak megfelel tehát egy Q 2×2 -es mátrix¹. Ekkor a kvaternió konjugálásnak ($q \mapsto \bar{q}$) az adjungálás ($Q \mapsto Q^\dagger$) felel meg, ahol $(QP)^\dagger = P^\dagger Q^\dagger$ -nek megfelelően $\bar{q}\bar{p} = \overline{pq}$. A valós és képzetes rész képzésének a megfelelő 2×2 -es mátrixok hermitikus és antihermitikus részének képzése, a kvaternió norma négyzet képzése a mátrix determinánsának képzésének felel meg. Az egységnyi normával rendelkező kvaternióknak (kvaternió „fázis” faktoroknak) ($|u| = 1$) az $U, V \in SU(2) \simeq S^3$ mátrixok felelnek meg.

A fenti \mathbb{H} -n alapuló képben a (2.27) egyenlet szerint egy két-qubit állapotnak a (Q_0, Q_1) pár ennek pedig egy $(q_0, q_1)^T \in \mathbb{H}^2$ kvaternió komponensekkel rendelkező oszlopvektor, „spinor” felel meg. Egy normált spinor esetén $(q_0, q_1)^T \in S^7$. Ebben az esetben a (2.35) és (2.36) leképezéseket a

$$\pi_A : S^7 \longrightarrow S^4, \quad x = 2q_1\bar{q}_0 \in \mathbb{H}, \quad x_4 = |q_0|^2 - |q_1|^2 \quad (2.41)$$

és

$$\pi_B : S^7 \longrightarrow S^4, \quad y = 2\bar{q}_0q_1 \in \mathbb{H}, \quad y_4 = |q_0|^2 - |q_1|^2 \quad (2.42)$$

formulákkal értelmezett leképezések helyettesítik. Ezek pedig a kvaterniós Hopf fibrálások szokásos definícióját adják [Min80].

Legyenek most v és u egység kvaterniók. Ekkor a

$$R_v : \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} q_0v \\ q_1v \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

jobb illetve a

$$L_u : \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uq_0 \\ uq_1 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

bal szorzás során az $x, y \in S^4$ vektorok nem változnak. A v és u kvaternió „fázisokkal” történő jobb és bal szorzás a $|\Psi\rangle$ két-qubit állapotot ható $I \otimes V$ és $U \otimes I$ lokális $SU(2)$ transzformációknak felel meg.

A π_A és π_B leképezések összefonódottság érzékenyek [MD01]. Ez azt jelenti, hogy a különböző összefonódottsági osztályokba eső két-qubit állapotok az S^4 gömb különböző tartományai

¹ Fontos, hogy a (2.40)-ben szereplő \mathbf{i} és i szimbólumokat ne keverjük össze.

esnek. Ennek felismeréséhez elég azt észrevennünk, hogy a (2.17) konkurrencia az $x_0 = y_0$ és $x_4 = y_4$ koordinátakomponensekkel a

$$\mathcal{C} = \sqrt{x_0^2 + x_4^2} = \sqrt{y_0^2 + y_4^2} \quad (2.45)$$

alakban fejezhető ki.

Maximálisan összefonódott állapotokra $\mathcal{C} = 1$ ezek tehát az $x_0^2 + x_4^2 = 1$ körön vannak. Az $x_4 = \pm 1$ pontok, a megfelelő S^4 „északi” és „déli” sarkpontja, ilyen állapotokat reprezentálnak. A fenti tulajdonságú pontokra (2.34) miatt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ és $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ ezért a (2.28) miatt $\varrho_A = \varrho_B = \frac{1}{2}I$ azaz a marginálisok teljesen kevert állapotok ahogy annak lennie is kell.

Másrészt szeparálható állapotokra $x_0 = x_4 = 0$, ekkor $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ és $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. Ezek két kettő dimenziós gömbfelületet írnak le. Ez a két S^2 a két szeparálható qubitnek megfelelő két úgynevezett Bloch gömb [NC00]. Ezeket a Bloch gömböket a megfelelő Hopf fibrálások S^4 gömbjeinek „egyenlítői” (melyek most S^3 -ak) tartalmazzák. Például az $x_3 = \pm 1$ -be vetülő állapotokra $\varrho_A = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_3)$ és $\varrho_B = \frac{1}{2}(I \mp \sigma_3)$ ezek a standard egy rangú projektorok melyek valóban szeparálható állapotok marginálisai.

Figyeljük meg, hogy a π_A és π_B leképezésekben az egyik qubit a fibrumban (S^3) a másik a bázistérben (S^4) helyezkedik el. A π_A esetén Alice qubitja a bázistérben Bob qubitja pedig a fibrumban van, π_B esetén megfordítva. A Hopf nyaláb egy nem triviális fibrált nyaláb. Ez azt jelenti, hogy az S^7 nyalábtér nem homeomorf $S^4 \times S^3$ -val. S^7 tehát nem egy szorzat nyaláb, ez a tulajdonság csak lokálisan teljesül. Pongyolán fogalmazva ez azt jelenti, hogy a Bob qubitjét tartalmazó S^3 topológiai értelemben „elcsavarodik” az Alice qubitjét tartalmazó S^4 felett. A következő két alfejezetben megmutatjuk, hogy a normált két-qubit állapotokat reprezentáló S^7 nemtrivialitása valóban az összefonódottság geometriai megjelenési formája [1].

2.2.3. A Schmidt dekompozíció és a kvaternió Hopf nyaláb [1]. Mivel a tárgyalás során a két qubit ekvivalens szerepet játszik elég csak az egyik Hopf leképezést vizsgálni. Legyen ez π_A . Tekintsük a két qubit állapotokat reprezentáló \mathbb{H}^2 spinorok terét mint egy jobb modult. Ez azt jelenti, hogy a (2.43) szabálynak megfelelően a kvaternió komponensű spinorokon a skalár kvaternióval történő szorzást mint *jobb* szorzást értelmezzük. \mathbb{H}^2 -n bevezetünk egy $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ belső szorzatot. Tetszőleges $|p\rangle \leftrightarrow (p_0, p_1)^T$ és $|q\rangle \leftrightarrow (q_0, q_1)^T$ spinorokra legyen $\langle p | q \rangle \equiv \bar{p}_0 q_0 + \bar{p}_1 q_1$. Ekkor egy nemzérus v kvaternióra $\langle pv | qv \rangle = \bar{v} \langle p | q \rangle v$. A bevezetett belső szorzat segítségével értelmezhetjük két normált két-qubit állapot $|p\rangle$ és $|q\rangle$ (Θ_{pq} *távolságát*)

$$\cos^2 \frac{\Theta_{pq}}{2} \equiv |\langle p | q \rangle|^2. \quad (2.46)$$

Mivel $\|p\| = \|q\| = 1$ ezért a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül akkor és csak akkor ha $|p\rangle = |q\rangle v$ ahol $|v| = 1$. Ebből következik, hogy $\Theta_{pq} = 0$ akkor és csak akkor ha a spinorok csak egy egységkvaternióval történő jobb szorzásban különböznek. Tehát pontosan azokra a két-qubit állapotokra melyek $I \otimes V$ ekvivalensek a fenti távolság zérus. A jobb szorzásra történő invariancia miatt a (2.46) infinitezimális változata egy metrikát definiál S^4 -en. Mivel S^4 homeomorf a $\mathbb{H}P^1$ kvaternió projektív egyenessel ezért ez a metrika a projektív terekre jólismert Fubini-Study metrika [BŽ06] kvaternió változata [Lév90, Lév91].

Tekintsünk most egy két qubit állapotnak megfelelő $|q\rangle$ spinort. Ennek az állapotnak megfelelő egy $\pi_A(|q\rangle) \in S^4$ pont. Ha ez a pont a szeparálható állapotoknak megfelelő részsokaságban van akkor a Schmidt dekompozíció egy tagból áll és ez maga az állapot. Ha a pont nincs ebben a részsokaságban akkor tekintsük a $\pi_A(|q\rangle) \in S^4$ ponton keresztülmenő a Fubini-Study metrikára vonatkozó geodetikusokat. Megmutatható [1], hogy a legközelebbi szeparálható állapot egy olyan geodetikuson van melyre a geodetikus távolság éppen a (2.26) képlettel adott Schmidt együttható: $\cos \frac{\theta}{2}$. Ebből következik, hogy θ az összefonódott állapothoz legközelebbi szeparálható állapot geodetikus távolsága. Ez a speciális geodetikus a szeparálható részsokaságot két pontban metszi.

A másik pont geodetikus távolsága $\pi - \theta$. Ezek a megfontolások a Schmidt együtthatók algebrai fogalmát a geodetikus távolság geometriai fogalmával kapcsolják össze.

A fentieket egy kétdimenziós gömbfelülettel kapcsolatos analógiával az alábbi módon szemléltethetjük. Tekintsünk egy olyan speciális két qubit összefonódott állapotot melyre $x_0 = x_2 = 0$. Az ilyen állapotok az $x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ gömbfelületen vannak. Az állapot összefonódott tehát (2.45) alapján nemzérus konkurrenciával rendelkezik ezért $x_4 \neq 0$. A határozottság kedvéért legyen $x_4 > 0$ tehát az állapotnak megfelelő pont az északi félgömbön van például Budapest földrajzi helyén. A szeparálható állapotok a gömbfelület egyenlítőjén helyezkednek el. Tekintsük az összefonódott állapotnak megfelelő ponton (Budapesten) átmenő hosszúsági kört. Ez az a geodetikus mely mentén haladva az egyenlítő a legközelebb van. Az a két átellenes pont ahol ez a hosszúsági kör metszi az egyenlítőt a Schmidt dekompozícióban szereplő szeparálható állapotpár „A” részrendszerbe eső részét reprezentálja. A pontok átellenesek tehát a megfelelő szeparálható qubitek „A” részei az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ Bloch gömbön ortogonális állapotoknak felelnek meg. Az átellenes pontoknak megfelelő geodetikus távolság és a Schmidt együtthatók kapcsolatát a (2.22) és a (2.25) összefüggések adják.

Figyeljük meg azonban, hogy a Schmidt dekompozíció „B” részrendszerbe eső qubitja már az S^4 feletti S^3 fibrumban van. Bob ezen qubitjét a fenti geometriai megfontolás még nem rögzíti. Azonban mivel $S^3 \simeq SU(2)$ ez pedig az egységkvaterniókkal azaz a kvaterniós fázisfaktorokkal kapcsolatos, ezért a Bob Schmidt dekompozícióban keletkező qubitjét a kvaterniós fázisfaktorok alkalmas rögzítésével tudnánk egyértelművé tenni. Ehhez szükségünk lenne arra, hogy a különböző S^4 -beli pontok feletti kvaterniós fázisokat összehasonlíthassuk.

2.2.4. Kvaterniós fázisfaktorok [1, 19]. Definiálnunk kellene tehát két $|p\rangle$ és $|q\rangle$ spinorra a kvaterniós „fáziskülönbségüket”. Ezt a Pancharatnam által bevezetett és a geometriai fázisok elméletében használt kapcsolat vagy konnexió általánosításának segítségével tehetjük meg [Ber87, 19]. Ha a két spinor ugyanazon a sugáron van azaz $|p\rangle = |q\rangle v$ ahol $|v| = 1$ akkor a „fáziskülönbség” éppen v . Legyen $\langle p|q'\rangle \neq 0$ ahol $|p\rangle$ és $|q'\rangle$ két rögzített spinor *nem ugyanazon a sugáron*. Azt mondjuk, hogy a $|p\rangle$ kvaterniós spinor „fázisban” van azzal a $|q\rangle = |q'\rangle v$ spinorral, melyre a $|v| = 1$ fázis változtatása során az „interferencia” maximális azaz

$$\| |p\rangle + |q'\rangle v \|^2 = \max. \quad (2.47)$$

Nyilván az „interferencia” maximális ha $\langle p|q'\rangle v \in \mathbb{R}^+$. Mivel $|v| = 1$ ezért

$$v = \frac{\langle q'|p\rangle}{|\langle q'|p\rangle|}, \quad |q\rangle = |q'\rangle \frac{\langle q'|p\rangle}{|\langle q'|p\rangle|}. \quad (2.48)$$

Tehát a $|p\rangle$ kvaterniós spinorral „fázisban” lévő $|q\rangle$ spinorra teljesül, hogy

$$\langle p|q\rangle = |\langle p|q'\rangle| \in \mathbb{R}^+. \quad (2.49)$$

Tehát általában $\langle p|q\rangle \in \mathbb{H}$ de ha a spinorok fázisban vannak akkor $\langle p|q\rangle \in \mathbb{R}^+$.

A következőkben a (2.49) szabály infinitezimális változatát vizsgáljuk. Legyenek $|q\rangle$ és $|q+dq\rangle$ egymáshoz infinitezimálisan közel lévő spinorok. Mivel $\|q\|^2 = \langle q|q\rangle = 1$ ezért $\langle dq|q\rangle + \langle q|dq\rangle = 0$. Ebből fakadóan a $\langle q|dq\rangle$ mennyiség tiszta kvaternió képzetes. Az infinitezimálisan különböző $|q\rangle$ és $|q+dq\rangle$ állapotok tehát „fázisban” vannak akkor és csak akkor ha

$$\Im \langle q|dq\rangle = \frac{1}{2}(\bar{q}_\alpha dq^\alpha - \overline{dq}^\alpha q_\alpha) = 0. \quad (2.50)$$

Írjuk most a $|q\rangle$ spinort a $|q\rangle = |q'(x)\rangle u$ alakba. A $|q'(x)\rangle$ -re gondolhatunk úgy mint egy $x \in S^4$ pontjaival parametrizált bázis spinorra, melyhez képest az $|u| = 1$ kvaterniós fázist majd leolvassuk. Mivel a Hopf nyaláb nemtriviális ezért $|q'(x)\rangle$ -t S^4 felett csak *lokálisan* tudjuk

definiálni. Az ilyen tulajdonságú bázis spinort a Hopf nyaláb lokális „szelésének” hívjuk. Legyen

$$|q'(x)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2(1+x_4)}} \begin{pmatrix} 1+x_4 \\ x \end{pmatrix}, \quad x = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \quad x_4 \neq -1. \quad (2.51)$$

Láthatóan a szelés S^4 „déli pólusában” nincs értelmezve. Ekkor a (2.50) feltételt a

$$du = -Au, \quad A = \frac{\Im \bar{x} dx}{2(1+x_4)} \quad (2.52)$$

alakba írhatjuk. Amennyiben a kvaterniókat a (2.40) módon 2×2 mátrixokkal ábrázoljuk, a megfelelő mennyiség egy $su(2)$ Lie-algebra értékű egy-forma. Megmutatható, hogy az A egy $SU(2)$ nem-Abeli mértéktérként viselkedik [1]. Az A nak megfelelő $F = dA + A \wedge A$ kétforma önduális, és a Hopf nyaláb második Chern száma $C_2 = 1$.²

Az (2.52) egyenlet segítségével definiálhatjuk a kvaterniós spinorok görbementi párhuzamos eltolását. Valóban legyen C egy a „déli” sarkon nem áthaladó $t \in \mathbb{R}$ -vel parametrizált görbe $x^\mu(t)$ lokális koordinátákkal. Rögzítsünk $t = 0$ -ra egy tetszőleges $|q(0)\rangle = |q'(x(0))\rangle$ spinort. Ekkor az $\dot{u} = -A(t)u(t)$ egyenlet $u(0) = \mathbf{1}$ kezdőfeltételnek eleget tevő megoldása

$$u(t) = \mathbf{P} \exp \left(- \int_0^t A \right) \quad (2.53)$$

ahol \mathbf{P} az útrendezett szorzatra utal. Ennek alapján a C mentén párhuzamosan eltoló spinor

$$|q(t)\rangle = |q'(t)\rangle u(t). \quad (2.54)$$

Fontos látni, hogy a kvaterniós spinorok fenti görbe menti párhuzamos eltolását az interferencia fizikai fogalmának alkalmas (2.47) általánosításával kaptuk. Mivel a kvaterniós spinorok összefonódott két qubit állapotokat reprezentálnak ezért szabályunk lehetőséget nyújt arra is, hogy egy összefonódott állapotot egy adott görbe mentén párhuzamosan eltoljunk. Ekkor a felszedett kvaterniós fázisnak egy $I \otimes V$ alakú lokális $SU(2)$ transzformáció felel meg.

Legyen most $|q\rangle \equiv |q'(x)\rangle$ kiindulási spinor az $x = \pi_A(|q\rangle)$ pont felett. Ezt szeretnénk párhuzamosan eltolni az y pontba. Mint tudjuk az y feletti állapotot a $|p\rangle \equiv |q'(y)\rangle$ bázisspinor reprezentálja. A Fehér László és Benedict Mihály által eredetileg a Berry fázis kontextusában felfedezett tétel általánosításával megmutatható [BF89, 1, 19], hogy amennyiben az x és y -t összekötő görbe a *rövidebb geodetikus* akkor a $|q\rangle$ párhuzamos eltolása során feleszedett kvaterniós fázis

$$u = \frac{\langle p|q \rangle}{|\langle p|q \rangle|} \quad (2.55)$$

Vége választ adhatunk tehát arra a kérdésre, hogy hogyan reprodukálhatjuk Bob Schmidt dekompozícióban szereplő qubitjét tisztán geometriai módon. Ehhez nem kell mást tennünk [1] mint párhuzamosan eltolni a kiindulási $x \in S^4$ pont feletti összefonódott állapotunkat reprezentáló spinort a szeparálható részsokaság megfelelő két pontjába a már tárgyalt tulajdonságú geodetikus mentén. Az eredményül kapott kvaterniós fázisok pontosan a Schmidt dekompozíció megfelelő a B részrendszerbe eső qubitjeit adják [1].

Végezetül megjegyezzük, hogy a (2.52) mértéktér az úgynevezett $SU(2)$ Yang-Mills insztanton mértéktere. Az insztantonok az $SU(2)$ Yang-Mills mértékelméletek Euklideszi téridőben kapható topológiai szempontból nemtriviális klasszikus megoldásai [BPST75]. A klasszikus elmélet kvantálásakor az insztantonok a különböző topológikus töltésekkel jellemzett szektorok közötti alagút effektus megjelenéséért felelősek [TH76]. Érdemes megjegyezni, hogy a Schmidt dekompozíció geometriai értelmezésén keresztül pontosan ezek a matematikai struktúrák jelennek meg az összefonódottság legegyszerűbb típusánál a két-qubit rendszereknél is. Érdekességként

²Hasonló, a π_B leképezésen alapuló okoskodás egy anti-önduális mértéktérrel ad ellentett előjelű Chern számmal. Ekkor persze a megfelelő spinorok terét mint egy bal modulust kell definiálni.

még megjegyezzük, hogy a későbbiekben, a Szerző által javasolt kvaterniók fázisfaktorok, Franson interferometriával való, kimutathatóságának lehetősége is felmerült[JES⁺11].

2.2.5. A két-qubit SLOCC osztályok geometriája . Tudjuk már, hogy két (2.15) alakban előálló $|\Psi\rangle$ és $|\Phi\rangle$ két-qubit állapot SLOCC ekvivalens ha (2.14) teljesül, ahol most $N = M = 2$. Feleltessük meg az alábbi módon egy tetszőleges két-qubit állapot négy komplex amplitudóját egy $\xi \in \mathbb{C}^4$ négyesvektor négy komponensének

$$\xi^I = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{00} \\ \Psi_{01} \\ \Psi_{10} \\ \Psi_{11} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Mivel a SLOCC transzformációk nem őrzik az állapotvektorok normáját ezért érdemes $\xi \in \mathbb{C}^4$ -beli vektorok helyett *sugarakat* vizsgálni. Valóban a kvantumelméletben a tiszta állapotoknak nem Hilbert tér-beli vektorok hanem sugarak felelnek meg. A \mathbb{C}^4 -beli sugarak tere négyesvektorok ekvivalenciaosztályainak halmaza ahol két nemzérus ξ és ξ' vektor ugyanabba az ekvivalenciaosztályba tartozik akkor és csak akkor ha létezik olyan nem zérus komplex szám λ , hogy $\xi' = \lambda\xi$. Ekkor $\xi' \sim \xi$. A sugarak tere \mathbb{C}^4 esetén a komplex projektív tér \mathbb{CP}^3 . Ez egy 3 komplex (6 valós) dimenziós kompakt komplex sokaság. Minden két-qubit állapotnak megfelel tehát \mathbb{CP}^3 egy pontja.

A (2.24) transzformációs szabály alapján tudjuk, hogy a SLOCC transzformációk $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ alcsoportjára nézve a (2.16)-ben bevezetett $\mathcal{C}(\Psi)$ konkurrenca invariáns. Ez motiválja azt, hogy a \mathbb{C} -en bevezessük a g

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\Psi, \Phi) &\longmapsto \Psi \cdot \Phi \equiv \Psi_{00}\Phi_{11} - \Psi_{01}\Phi_{10} - \Psi_{10}\Phi_{01} + \Psi_{11}\Phi_{00} \end{aligned} \quad (2.57)$$

nemdegenerált szimmetrikus bilineáris formát. A megfelelő négyesvektorokkal

$$(\xi, \eta) \mapsto \xi \cdot \eta = g_{IJ} \xi^I \eta^J = \varepsilon^{a_1 a_2} \varepsilon^{b_1 b_2} \Psi_{a_1 b_1} \Phi_{a_2 b_2}, \quad I, J = 0, 1, 2, 3 \quad (2.58)$$

ahol g_{IJ} az $\varepsilon \otimes \varepsilon$ $SL(2) \times SL(2)$ invariáns mátrixnak felel meg

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

A g bilineáris formához asszociált³ kvadratikussá forma abszolútértéke a konkurrenciát adja

$$\mathcal{C}(\Psi) = |Q(\xi)| = 2 |\text{Det } \Psi|. \quad (2.60)$$

A $Q(\xi) = 2(\xi^0 \xi^3 - \xi^1 \xi^2) = 0$ homogén másodfokú polinom \mathbb{CP}^3 -ban két komplex dimenziós \mathcal{Q} kvadratikussá felületet határoz meg. Ezért a zérus konkurrenciával jellemzett szeparálható állapotok olyan \mathbb{CP}^3 -beli pontokkal jellemezhetők melyek a rajta vannak \mathcal{Q} -n. Az összefonódott állapotokat pedig azok a pontok reprezentálják melyek nincsenek rajta \mathcal{Q} -n. Mivel csak két SLOCC osztályunk van ezért a két-qubit SLOCC osztályok szerkezetét ez az egyszerű geometriai kép jellemezi.

Megjegyezzük, hogy mivel $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$ ezért azt várjuk, hogy $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^3$. Ez azt jelentené, hogy a két különböző qubit sugarainak megfelelő két $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ Bloch gömb beágyazható \mathbb{CP}^3 -ba. A beágyazás valóban létezik a Segre-beágyazás⁴ névre hallgat és a megfelelő

³ $Q(\xi) \equiv g(\xi, \xi) = \xi \cdot \xi$.

⁴ A Segre beágyazás a $\mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C}^{m+1} = \mathbb{C}^{(n+1)(m+1)}$ esetben a két részrendszeres összefonódottsággal kapcsolatos ahol a Hilbert terek dimenziója $N = n+1$ és $M = m+1$. Ekkor a $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m \hookrightarrow \mathbb{CP}^{(n+1)(m+1)-1}$ beágyazás a szeparálható állapotok részsokaságával kapcsolatos.

projektív terek homogén koordinátaiban $\Psi_{ab} = \psi_a \varphi_b$ módon jellemezhető. Ez azonban pontosan a \mathcal{Q} szeparálható felületet jellemzi⁵. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\mathcal{Q} \simeq \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1. \quad (2.61)$$

Megmutatható, hogy a \mathcal{Q} felület azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a felület bármely pontján két olyan komplex egyenes halad át mely teljes egészében \mathcal{Q} -ban fekszik⁶. Az ilyen egyeneseket *izotróp* egyeneseknek nevezzük. Ha $\xi \neq c\eta$ ahol $c \in \mathbb{C}^\times$ akkor $L = s\xi + t\eta$, ahol $s, t \in \mathbb{C}$ egy egyenes \mathbb{CP}^3 -ban. L tehát izotróp ha $L \cdot L = 0$. A három-qubit rendszerek geometriájának vizsgálatakor látni fogjuk, hogy ezek a \mathcal{Q} felületben teljes egészében benne fekvő komplex egyenesek biszeparálható SLOCC osztályokat reprezentálnak (lásd 2.6 és 2.7 ábra).

⁵Pontosabban a \mathbb{CP}^3 -ban lévő nem degenerált kvadratikus felületek egy-egyértelmű módon megfeleltethetők $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ összes lehetséges beágyazásának.

⁶A valós esetben ennek vizualizációját lásd Bengtsson és Życzkowski könyvében [BŻ06].

2.3. Kevert állapotok összefonódottsága

A két részrendszeres összefonódottság eddigi tárgyalása során kizárólag tiszta állapotokkal foglalkoztunk. Felmerül a kérdés: hogyan lehet definiálni kevert állapotok összefonódottságát?

Egy AB összetett rendszer kevert állapotait a $\varrho : \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ sűrűségoperátor jellemzi. A bennünket érdeklő véges dimenziós esetben ϱ Hermitikus ($\varrho^\dagger = \varrho$), pozitív szemidefinit mátrix ($\varrho \geq 0$) egységnyi átlósösszeggel ($\text{Tr } \varrho = 1$).

Mint ismeretes egy adott ϱ állapotot tiszta állapotok keverékeként sokféleképpen előállíthatunk. Matematikai szempontból ez azt jelenti, ϱ egy rangú projektorok konvex kombinációjaként többféleképpen is felírható. Adott ϱ esetén egy ilyen lehetséges előállítás alakja az alábbi

$$\varrho = \sum_{j=1}^K p_j |\chi_j\rangle\langle\chi_j|, \quad |\chi_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad \sum_{j=1}^K p_j = 1 \quad (2.62)$$

ahol a p_j -k nemnegatív valós számok. A projektorokat alkotó $|\chi_j\rangle$, $j = 1, 2, \dots, K$ állapotok normáltak de nem feltétlenül ortogonálisak. Fontos azt is megjegyezni, hogy K akár nagyobb is lehet mint NM azaz $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ dimenziója. Természetesen mivel ϱ egy Hermitikus mátrix ezért a fenti alakú előállítások között ott van a ϱ diagonalizálásával kapható kanonikus alak

$$\varrho = \sum_{i=1}^{MN} \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad |\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad \sum_{i=1}^{MN} \lambda_i = 1. \quad (2.63)$$

Itt a nemnegatív λ_i -k a sajátértékek és a $|\psi_i\rangle$ sajátvektorok most egy ortonormált bázist alkotnak.

A sűrűségmátrix fenti "többértelműségét" precíz módon kifejezhetjük az ún. keverési tétel segítségével [Sch35b, HJW93, Gis89]. Ennek alapján a (2.63) kanonikus formában előálló sűrűségmátrix a (2.62) alakban is előállítható akkor és csak akkor ha létezik olyan $K \times K$ -s unitér mátrix \mathcal{U} , hogy

$$|\chi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_j}} \sum_{i=1}^{MN} \mathcal{U}_{ji} \sqrt{\lambda_i} |\psi_i\rangle. \quad (2.64)$$

Figyeljük meg, hogy az \mathcal{U} mátrix nem a $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ Hilbert téren hat hanem olyan vektorokon melyeknek komponensei tiszta állapotvektorok. Figyeljük meg azt is, hogy a (2.64) egyenletben a $K \times K$ -s \mathcal{U} mátrixnak csak az első MN oszlópa jelenik meg.

Természetesen a (2.62) egyenletben szereplő $|\chi_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tiszta állapotokat reprezentáló vektorok lehetnek szeparálhatók és összefonódottak is. Azt mondjuk, hogy a keveréssel keletkező ϱ állapot összefonódott ha ϱ -t *nem tudjuk* előállítani *szeparálható* tiszta állapotok konvex kombinációjaként. Fontos összefonódottsági mérték az ún. *formációs összefonódottság* [BDSW96]

$E_f(\varrho)$

$$E_f(\varrho) = \min \sum_{j=1}^K p_j S(\chi_j). \quad (2.65)$$

Itt S a (2.9) egyenletben definiált von-Neumann entrópia. A definícióban szereplő minimumot ϱ *összes* (2.62) alakú előállítására kell venni. A ϱ mátrixok azon sokasága melyre minimumot kapunk *optimális*. Megmutatható, hogy a formációs összefonódottság akkor és csak akkor zérus ha a kevert állapot szeparálható.

A formációs összefonódottság fizikai jelentése az alábbi [Woo01]. Tegyük fel, hogy A és B (Alice és Bob) közös ténykedésük eredményeképpen szeretnének létrehozni n darab ϱ állapotot. Ehhez rendelkezésükre áll tetszőleges számú összefonódott (2.19) Bell állapot. Minden egyes Bell pár A része Alice a B része Bob birtokában van. Alice és Bob *globális* kvantum operációk kivételével bármilyen manipulációt használhatnak. Kérdés: mennyi Bell párt kell aszimptotikusan elhasználniuk (m) ahhoz, hogy n darab ϱ állapotot hozzanak létre? A válasz $m = nE_f(\varrho)$.

Hogyan határozhatjuk meg egy konkrét esetben a formációs összefonódottságot? A keverési tételből már tudjuk, hogy az összes ilyen előállítást a K dimenziós komplex vektortérben lévő MN komponensű lineárisan független ortonormált bázisvektorok adják. $K \geq MN$ esetén ezeket a vektorokat tekinthetjük egy $K \times K$ -s unitér mátrix első MN oszlopának. Az ilyen tulajdonságú vektorok összessége a differenciálgeometriából ismeretes Stiefel-sokaság $V(K, MN)$. Ekkor a minimumot matematikai szempontból jól kézbentartható objektumokra, $V(K, MN)$ -kre, ahol $K \geq MN$ kell venni. Sajnos ennek ellenére a formációs összefonódottság kiszámítása csak igen speciális esetekben ismeretes.

A legegyszerűbb konkrétan kiszámítható eset két qubit keverésével kapható [Woo98, HW97]. Ekkor kiderül, hogy a (2.62) egyenletben elegendő $K = 4$ -et venni. Defináljuk a $\varrho \mapsto \tilde{\varrho}$ *spin-flip* operációt ahol

$$\tilde{\varrho} \equiv \varepsilon \otimes \varepsilon \tilde{\varrho} \varepsilon \otimes \varepsilon, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Megmutatható [Woo98, HW97], hogy a 4×4 -es $\varrho \tilde{\varrho}$ mátrix sajátértékei nemnegatívak. Képezzük ezeknek a sajátértékeknek a négyzetgyökét. Az eredményül kapott valós számok: $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3 \geq \Lambda_4$. Defináljuk a kevert állapotokra a konkurenciát az alábbi módon

$$0 \leq \mathcal{C}(\varrho) \equiv \max\{0, \Lambda_1 - \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4\} \leq 1. \quad (2.67)$$

Ekkor megmutatható, hogy

$$E_f(\varrho) = -\mu_+^2 \log_2 \mu_+^2 - \mu_-^2 \log_2 \mu_-^2, \quad \mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \mathcal{C}(\varrho)} \right). \quad (2.68)$$

Ennek alapján $\mathcal{C}(\varrho) = 0$ ($E_f(\varrho) = 0$) esetén az állapotok szeparálhatók míg $\mathcal{C}(\varrho) \neq 0$ ($E_f(\varrho) \neq 0$) esetén összefonódtak. Ha ϱ tiszta állapot belátható, hogy (2.67) visszaadja a tiszta állapotokra már definiált (2.17) konkurenciát. Ebben az esetben a formációs összefonódottságra kapjuk, hogy $E_f(\Psi) = S(\Psi)$.

Példaként tekintsük az alábbi sűrűségmátrixot

$$\varrho = \frac{1}{4}(1-x)I + x|\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+x & 0 & 0 & 2x \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 2x & 0 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

ahol $x \in [0, 1]$ és Φ a (2.19) Bell állapot. Rövid számolás után kapjuk, hogy $\Lambda_1 = (1+3x)/4$ and $\Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = (1-x)/4$. Sűrűségmátrixunk tehát $x \leq 1/3$ esetén szeparálható míg $x > 1/3$ esetén összefonódt. Összefonódt állapotok esetén a konkurencia értéke $\mathcal{C}(\varrho) = (3x-1)/2$. A konkurencia $x = 1$ esetén maximális ekkor ϱ a $|\Phi\rangle\langle\Phi|$ tiszta állapot. Vegyük észre, hogy az $x = 0$ -ra kapható teljesen kevert állapot szeparálható. Tehát erre a példára kevertség és az összefonódottság komplementer fogalmak.

2.4. Valós két részrendszert tartalmazó kétállapotú rendszerek

Komplex kétállapotú rendszerek esetén qubitekről [NC00] valós esetben *rebitekről* [CFR01] szokás beszélni. A két rebit állapotot írjuk a

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b=0,1} \Psi_{ab}|ab\rangle, \quad \begin{pmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{01} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \quad (2.70)$$

alakba. $M(2, \mathbb{R})$ -t egy \mathbb{R} feletti négydimenziós vektortérnek tekintve az alábbi bázist választjuk

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Ekkor

$$|\Psi\rangle = \sum_{I=0}^3 W^I |\varphi_I\rangle, \quad \begin{pmatrix} \Psi_{00} & \Psi_{01} \\ \Psi_{10} & \Psi_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W^0 + W^3 & W^1 + W^2 \\ W^2 - W^1 & W^0 - W^3 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

ahol $|\varphi_I\rangle$, $I = 0, 1, 2, 3$ az ún. Bell bázis vektorai

$$|\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (2.73)$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad |\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle). \quad (2.74)$$

A (2.66) definícióhoz hasonlóan egy tetszőleges $M \in M(2, \mathbb{R})$ elemre is definiáljuk a Wootters spin flip operációt: $\tilde{M} \equiv -\varepsilon M^T \varepsilon$. Ekkor a tiszta állapotokra értelmezett konkurrenciát a valós esethez hasonlóan a

$$\mathcal{C} = 2|\text{Det } \Psi| = |\text{Tr}(\tilde{\Psi}\Psi)| = |\text{Tr}(\Psi\varepsilon\Psi^T\varepsilon)|, \quad (2.75)$$

képlet definiálja. Két különböző amplitudóval rendelkező rebitre a konkurrencia fenti definíciója ismét a szokásos (2.57) bilineáris forma bevezetését motiválja. A (2.57) formával kapcsolatos kvadratikussá alakja

$$\Psi \cdot \Psi = 2\text{Det } \Psi = 2(\Psi_{00}\Psi_{11} - \Psi_{01}\Psi_{10}) = W_0^2 + W_1^2 - W_2^2 - W_3^2. \quad (2.76)$$

Tehát a Bell bázisban a konkurrencia az instruktív $SO(2, 2)$ invariáns alakot ölti. Ebből következik, hogy a két rebit SLOCC csoport $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ részcsoportha izomorf az $SO(2, 2)$ csoporttal.

Az E_I , $I = 0, 1, 2, 3$ bázisvektorok a \mathbb{H}_s split-kvaternióalgebra⁷ e_0, e_1, e_2, e_3 bázisvektorainak mátrix ábrázolásaként is felfoghatók. Ekkor egy tetszőleges $x \in \mathbb{H}_s$, $x = \sum_{m=0}^3 x_m e_m$ elem megfelel egy $X \in M(2, \mathbb{R})$ elemnek azaz egy két rebit állapotnak. Ebben a képben a Wootters spin flip a \mathbb{H}_s belüli konjugálásnak ($\bar{x} \mapsto \tilde{X}$), a konkurrencia a \mathbb{H}_s -beli N normának, végül a valós SLOCC csoport $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ részcsoportha az N normát őrző $SO(2, 2)$ csoportnak felel meg. Vegyük észre azt is, hogy a (2.57) bilineáris forma rebitekre leszűkített változata a \mathbb{H}_s -beli $\langle x, y \rangle = N(x + y) - N(x) - N(y)$ bilináris formával kapcsolatos.

⁷Egy egységelemmel rendelkező algebrát kompozíciós algebrának nevezünk ha az algebrában létezik egy nem-degenerált N (norma) kvadratikussá alakja melyre $N(xy) = N(x)N(y)$. A kompozíciós algebra *split* ha tartalmaz olyan nemzérus elemeket melyek normája zérus. Hurwitz híres tétele kimondja, hogy egy kompozíciós algebra mindig véges, éspedig 1, 2, 4, 8 dimenziós. Ezek az esetek megfelelnek a valós számok, a komplex számok a kvaterniók és az oktoniók kompozíciós algebráinak, illetve ezek split változatainak.

2.5. Három-qubit rendszerek

2.5.1. Invariánsok és SLOCC osztályok . A több részrendszeres összefonódottság esetén az egyes részrendszerek tiszta állapotait a véges d_A, d_B, d_C, \dots dimenziós komplex Hilbert terek $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_C \dots$ sugarai reprezentálják. Egy d komponensű állapotvektort *qudit*-nak hívunk. Gyakran a vizsgált esetekben $d_A = d_B = d_C = \dots = 2$ (multiqubit rendszerek) vagy $d_A = d_B = d_C = \dots = 3$ multi *qutrit* rendszerek, vagy ezek kombinációi szerepelnek. A több részrendszert tartalmazó rendszerek közül a legegyszerűbb a három-qubit rendszer.

Egy három-qubit állapotot a

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b,c=0}^1 \Psi_{abc} |abc\rangle, \quad |abc\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle \otimes |c\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C \quad (2.77)$$

alakba írhatunk ahol $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 3} \simeq \mathbb{C}^8$. A továbbiakban a részrendszereket A, B, C -vel (Alice, Bob és Charlie részrendszere) a részrendszereknek megfelelő amplitúdók indexeit a, b, c -vel jelöljük. Szeretnénk meghatározni a három qubit összefonódottsági osztályait.

Tudjuk már, hogy két lehetséges klasszifikációs sémánk van. A finomabb felosztást adó LU klasszifikáció az ekvivalencia

$$|\Psi\rangle \sim_{LU} |\Phi\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\Psi\rangle = \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} |\Phi\rangle, \quad \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \in U(2)^{\otimes 3} \quad (2.78)$$

fogalmára épít. Fontos szerepet tölt be a durvább felosztást nyújtó

$$|\Psi\rangle \simeq_{SLOCC} |\Phi\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\Psi\rangle = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} |\Phi\rangle, \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \in GL(2, \mathbb{C})^{\otimes 3} \quad (2.79)$$

SLOCC ekvivalencián alapuló klasszifikáció. Az alábbiakban kizárólag a három qubit állapotok SLOCC klasszifikációjára koncentrálnunk.

Ebben az esetben az összefonódottsági osztályok száma véges és az osztályok geometriai jelentése is könnyen tisztázható. Ezek az osztályok a matematikusok számára régóta ismeretesek voltak [GK94]. Ezeket az eredményeket a kvantum információelmélet keretein belül a fizikusok újra felfedezték [DVC00]. Ezen eredmények szerint mindössze két nemtriviális SLOCC összefonódottsági osztály van. A fennmaradó négy osztály a szeparálható állapotok különböző fajtáival kapcsolatos. Szokás még a teljesség kedvéért az azonosan zérus állapotot az ún. triviális osztályba sorolni.

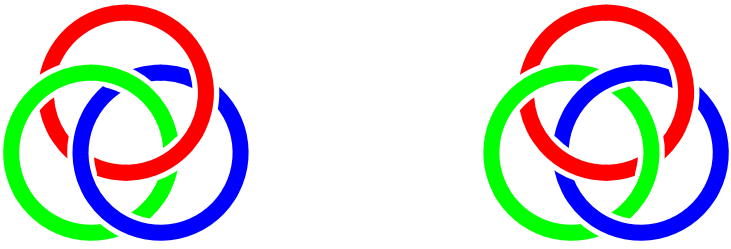
Három qubit tehát két inekvivalens módon fonható össze. A megfelelő SLOCC ekvivalenciaosztályok normált reprezentánsai a

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (2.80)$$

Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) állapot [Gre89, Mer07] és a

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (2.81)$$

állapot. A GHZ állapot a maximális hármas összefonódottságot reprezentálja. Azonban a GHZ állapotban lévő összefonódottságot csak abban az esetben lehet további kvantumos manipulációkra felhasználni ha a három qubitet birtokló kísérletező együttműködik. Az egyik qubit (például a Charlie birtokában lévő C-qubit) vesztésével kapott kétrészesekés ϱ_{AB} marginálisra számított kevert állapoti konkurrencia zérusnak adódik. Ez az Alice és Bob számára hozzáférhető állapot tehát már nem tartalmaz további kvantumos manipulációk során felhasználható összefonódottságot. Ha ezt az összefonódottságot három színes gyűrűvel akarnánk szemléltetni akkor az egységet szimbolizáló Borromeói gyűrűket kapnánk. Ekkor a gyűrűk bármelyikének átvágásával a rendszer szétesik három diszjunkt gyűrűre. Ezzel szemben a W állapot összefonódottsága nem



$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad |GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

2.1. ábra. A W és GHZ osztályok szemléltetése.

érzékeny ennyire egyetlen qubit elvesztésére. Megmutatható [DVC00], hogy az AB , AC és BC részrendszerekben tárolt átlagos összefonódottság ebben az esetben maximális.

A fennmaradó SLOCC osztályok $A(BC)$, $B(AC)$ és $C(AB)$ típusú biseparálható és $(A)(B)(C)$ teljesen szeparálható állapotokkal reprezentálhatók. A biseparálható osztályok reprezentánsai

$$|A(BC)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle(|01\rangle + |10\rangle) \quad (2.82)$$

az $A(BC)$ állapotokra míg a fennmaradó osztályokat két hasonló a qubitek permutálásával kapott állapot reprezentálja. A teljesen szeparálható osztály reprezentánsául a $|000\rangle$ állapot választható.

Hogyan jellemezhetnénk a három qubit összefonódottságot polinom invariánsok segítségével? A két részrendszeres összefonódottság vizsgálata alapján már tudjuk, hogy a biseparálhatóságot eredményesen méri a megfelelő marginálisokból képzett mértékek. Tekintsük tehát a

$$\varrho_A = \text{Tr}_{BC} |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad \varrho_B = \text{Tr}_{AC} |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad \varrho_C = \text{Tr}_{AB} |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad (2.83)$$

egy qubit és a

$$\varrho_{BC} = \text{Tr}_A |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad \varrho_{AC} = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad \varrho_{AB} = \text{Tr}_C |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (2.84)$$

két qubit sűrűségmátrixokat. Az utóbbiak 4×4 -es mátrixok. Az előző fejezetek alapján a biseparálhatóság mértékeként használhatjuk a (2.16)-ban definiált $0 \leq 4 \text{Det } \varrho_{A,B,C} \leq 1$ konkurrencia négyzeteket. Például a $|\Psi\rangle$ három-qubit állapot $A(BC)$ szeparálható akkor és csak akkor ha $4 \text{Det } \varrho_A = 0$. Ennek alapján hasznos definiálni a

$$\tau_{A(BC)} = 4 \text{Det } \varrho_A, \quad \tau_{B(AC)} = 4 \text{Det } \varrho_B, \quad \tau_{C(AB)} = 4 \text{Det } \varrho_C \quad (2.85)$$

összefonódottsági mértékeket. Ezek a mértékek $U(2) \times U(4)$ invariánsok ahol az $U(2)$ azon a qubiten hat melynek a szeparálhatóságát szeretnénk tesztelni.

A biseparálhatóságon kívül megkérdezhetjük azt is mekkora az A és B részrendszer kevert állapotú összefonódottsága az ABC tiszta állapotban lévő teljes rendszeren belül? Erre a kérdésre a választ a (2.68) formációs összefonódottság vagy az ennek alapjául szolgáló (2.67) kevert állapotú Wootters konkurrencia értéke adja. Ha például a BC részrendszer összefonódottságát vizsgáljuk akkor a három-qubit állapot első qubitje a $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$ felbontásnak megfelelően kitüntetett szerepet fog játszani. A 2.1 fejezetben elmondottak szerint a ϱ_{BC} nemzérus sajátértékeinek száma maximum kettő. Ez a két sajátérték ugyanaz mint a ϱ_A marginális két sajátértéke. Amikor tehát a kevert állapotú konkurrenciát (2.67) alapján számoljuk akkor a $\tilde{\varrho}$ mátrixra két Λ_1 és Λ_2 nemnegatív valós számot kapunk. A számolás eredményeképp a Wootters konkurrencia négyzetre kapjuk

$$\mathcal{C}_{BC}^2 \equiv \mathcal{C}^2(\varrho_{BC}) = \text{Tr}(\varrho_{BC} \tilde{\varrho}_{BC}) - 2\Lambda_1\Lambda_2 = \varrho^{IJ} \varrho_{IJ} - 2\Lambda_1\Lambda_2 \quad (2.86)$$

ahol az indexek felhúzását a (2.57)-ben definiált bilineáris forma mátrixával végezzük. A többi kétrészes rendszert is figyelembe véve végül a

$$\tau_{AB} = \mathcal{C}_{AB}^2, \quad \tau_{AC} = \mathcal{C}_{AC}^2, \quad \tau_{BC} = \mathcal{C}_{BC}^2 \quad (2.87)$$

mértékeket kapjuk. Normált állapotokra mindhárom mérték lehetséges értékei a $[0, 1]$ intervallumba esnek.

Fontos kérdés annak eldöntése, hogyan osztoznak meg a részrendszerek a különböző típusú összefonódottságokon. Másképpen szólva hogyan viszonyulnak egymáshoz a $\tau_{A(BC)}$, τ_{AB} és τ_{AC} mennyiségek? Előfordulhat-e például az, hogy az A részrendszer összefonódott a BC együttes rendszerrel, de *külön-külön* nem fonódott össze sem a B sem a C rendszerekkel? Ha az összefonódottságot az emberi kapcsolatok világában próbálnánk elhelyezni akkor a fenti kérdés meglehetősen abszurd. Ha például az összefonódottságot itt a szeretet szimbolizálná akkor igencsak nehéz lenne elképzelni egy olyan kétgyermekes családot aki szereti a gyerekeit, de külön-külön egyiküket sem. A kvantumos világban a $|GHZ\rangle$ állapot az összefonódottság pontosan ilyen megosztására ad példát. Valóban, rövid számolás mutatja, hogy

$$\tau_{A(BC)} = 1, \quad \tau_{AB} = \tau_{AC} = 0, \quad (2.88)$$

ez pedig pontosan a fenti abszurd szituáció kvantumos megfelelője. Másrészt a $|W\rangle$ állapot arra mutat példát amikor az 1 részrendszernek a 23 együttes rendszerrel való összefonódottsága megszlik az egyes részrendszerek között. Ekkor ugyanis

$$\tau_{A(BC)} = \tau_{AB} + \tau_{AC}. \quad (2.89)$$

Definiáljuk most a *maradék* vagy *hármás* összefonódottságot [CKW00]

$$\tau_{ABC} \equiv \tau_{A(BC)} - \tau_{AB} - \tau_{AC} = \tau_{B(AC)} - \tau_{AB} - \tau_{BC} = \tau_{C(AB)} - \tau_{AC} - \tau_{BC}. \quad (2.90)$$

A hármás összefonás láthatóan permutáció invariáns. A τ_{ABC} kielégíti a

$$0 \leq \tau_{ABC} = 4|D(\Psi)| = 4\Lambda_1\Lambda_2 \leq 1 \quad (2.91)$$

összefüggést, és a Ψ_{abc} komplex amplitudókkal kifejezett explicit alakjában a $D(\Psi)$ definíciója [GK94, CKW00, Miy03]

$$\begin{aligned} D(\Psi) \equiv & \Psi_{000}^2 \Psi_{111}^2 + \Psi_{001}^2 \Psi_{110}^2 + \Psi_{010}^2 \Psi_{101}^2 + \Psi_{011}^2 \Psi_{100}^2 \\ & - 2(\Psi_{000} \Psi_{001} \Psi_{110} \Psi_{111} + \Psi_{000} \Psi_{010} \Psi_{101} \Psi_{111} \\ & + \Psi_{000} \Psi_{011} \Psi_{100} \Psi_{111} + \Psi_{001} \Psi_{010} \Psi_{101} \Psi_{110} \\ & + \Psi_{001} \Psi_{011} \Psi_{110} \Psi_{100} + \Psi_{010} \Psi_{011} \Psi_{101} \Psi_{100}) \\ & + 4(\Psi_{000} \Psi_{011} \Psi_{101} \Psi_{110} + \Psi_{001} \Psi_{010} \Psi_{100} \Psi_{111}) \end{aligned} \quad (2.92)$$

A fenti mennyiséget Arthur Cayley vezette be 1845-ben a $2 \times 2 \times 2$ *kocka* "determinánsaként" [Cay45]. A továbbiakban ezt a mennyiséget Cayley-hiperdeterminánsnak fogjuk hívni. Könnyen ellenőrizhető, hogy $D(\Psi)$ kifejezése az abc részrendszer indexek cseréjére nézve permutáció invariáns. A továbbiakban azt is megmutatjuk, hogy $D(\Psi)$ invariáns az $SL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ SLOCC részcsoport transzformációkra nézve, a teljes $GL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ SLOCC csoportra nézve pedig relatív invariáns. Képletben

$$D(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}\Psi) = (\text{Det } \mathcal{A})^2 (\text{Det } \mathcal{B})^2 (\text{Det } \mathcal{C})^2 D(\Psi), \quad \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in GL(2, \mathbb{C}). \quad (2.93)$$

A definíció alapján az is látható, hogy a SLOCC reprezentáns állapotokra

$$\tau_{ABC}(GHZ) = 1, \quad \tau_{ABC}(W) = 0, \quad \tau_{ABC}((A)(B)(C)) = 0 \quad (2.94)$$

$$\tau_{ABC}(A(BC)) = \tau_{ABC}(B(AC)) = \tau_{ABC}(C(AB)) = 0. \quad (2.95)$$

Tehát a $|GHZ\rangle$ állapot hármas összefonása maximális, míg a többi SLOCC osztályba tartozó állapotoké zérus. A τ_{ABC} mérték a tehát felhasználható a GHZ osztályba eső állapotok azonosítására.

Érdekes a fenti megfontolásokat a Coffinann-Kundu-Wootters egyenlőtlenségek [CKW00] formájában memorizálni

$$\tau_{AB} + \tau_{AC} \leq \tau_{A(BC)}, \quad \tau_{AB} + \tau_{BC} \leq \tau_{B(AC)}, \quad \tau_{AC} + \tau_{BC} \leq \tau_{C(AB)}. \quad (2.96)$$

Ezek az egyenlőtlenségek megmutatják, hogy az összefonódottság mint egy erőforrás hogyan oszlik meg a különböző részrendszerek között. Néha a fenti egyenlőtlenségeket *monogámia* összefüggéseknek is szokták hívni jelezvén azt, hogy az összefonás nem osztható meg szabadon.

2.5.2. A hármas összefonás SLOCC invarianciája . Vizsgáljuk meg részletesen a $\tau_{ABC} = 4|D(\Psi)|$ hármas összefonás invariancia tulajdonságait! Ehhez figyeljük meg, hogy Cayley $D(\Psi)$ hyperdeterminánsát az alábbi alakban is felírhatjuk

$$D(\Psi) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{a_1 a_3} \varepsilon^{b_1 b_2} \varepsilon^{c_1 c_2} \varepsilon^{a_2 a_4} \varepsilon^{b_3 b_4} \varepsilon^{c_3 c_4} \Psi_{a_1 b_1 c_1} \Psi_{a_2 b_2 c_2} \Psi_{a_3 b_3 c_3} \Psi_{a_4 b_4 c_4}. \quad (2.97)$$

Ez az alak nem tükrözi $D(\Psi)$ permutáció invarianciáját hiszen a $\Psi_0 \equiv \Psi_{0bc}$, $\Psi_1 \equiv \Psi_{1bc}$ és a (2.57) definíciókkal a

$$D(\Psi) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{a_1 a_3} \varepsilon^{a_2 a_4} (\Psi_{a_1} \cdot \Psi_{a_2}) (\Psi_{a_3} \cdot \Psi_{a_4}) \quad (2.98)$$

alakba írható ahol Alice qubitja kitüntetett szerepet játszik. $D(\Psi)$ permutáció invarianciája miatt a Bob illetve Charlie qubitjének kitüntetésével és a $\Psi_0 \equiv \Psi_{a0c}$, $\Psi_1 \equiv \Psi_{a1c}$ illetve a $\Psi_0 \equiv \Psi_{ab0}$, $\Psi_1 \equiv \Psi_{ab1}$ párok bevezetésével egy hasonló konstrukció során ismét a (2.92) formulát kapnánk.

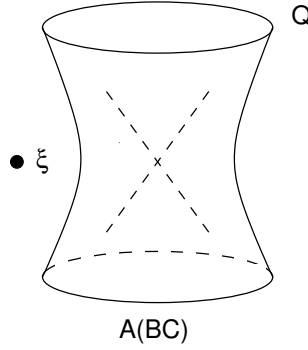
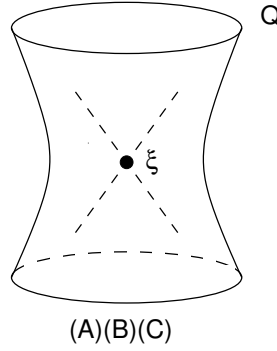
A (2.97) képlet segítségével gyorsan beláthatjuk $D(\Psi)$ $SL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ invarianciáját, és SLOCC relatív invarianciáját. Legyen először $A \otimes B \otimes C \in SL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$. Ekkor az $I \otimes B \otimes C$ alakú transzformációkra a fenti kifejezés invariáns a (2.57) · szorzat $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ invarianciája miatt. Másrészt az $\varepsilon^{a_1 a_3} \varepsilon^{a_2 a_4} (\Psi_{a_1} \cdot \Psi_{a_2}) (\Psi_{a_3} \cdot \Psi_{a_4})$ kifejezés $2 \text{Det}(\Psi_a \cdot \Psi_{a'})$ -vel egyenlő. Legyen $M_{aa'} \equiv (\Psi_a \cdot \Psi_{a'})$. Ekkor az $M_{aa'} \mapsto (AM A^T)_{aa'}$ transzformációs tulajdonság miatt $\text{Det } M$ nem változik. Tehát $D(\Psi)$ a fennmaradó $A \otimes I \otimes I$ alakú transzformációkra is invariáns. Másrészt amennyiben $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \in GL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ SLOCC transzformációkat használunk ekkor az $M \mapsto AM A^T$ jellegű transzformációs szabály miatt $D(\Psi)$ ezúttal egy $\text{Det}(\mathcal{A})^2$ faktoriall szorozódik. A permutációs szimmetria miatt a végeredmény a relatív invarianciát kifejező (2.93) összefüggés.

2.5.3. A három qubit SLOCC osztályok geometriája [2, 4]. Jóllehet a permutációs szimmetriát sérti, az összefonódottság geometriájának vizsgálatában az egyik qubitet kitüntető szemléletmód nagyon hasznos. A két qubit rendszerek geometriájának vizsgálatában is ezt az utat követtük. Legyen az ABC rendszer kitüntetett qubitja A . Ekkor a három qubit rendszert jellemző 8 komplex amplitúdó helyett a $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$ felbontásnak megfelelő Ψ_{0bc} , Ψ_{1bc} 2×4 amplitúdót tekintjük. Legyen

$$\xi^I \equiv \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{000} \\ \Psi_{001} \\ \Psi_{010} \\ \Psi_{011} \end{pmatrix} \quad \eta^I \equiv \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{100} \\ \Psi_{101} \\ \Psi_{110} \\ \Psi_{111} \end{pmatrix}. \quad (2.99)$$

Mint tudjuk \mathbb{C}^4 -en adott két extra struktúra. **1.** A szokásos $U(4)$ invariáns Hermitikus skalárszorzat mely komplex antilineáris az első tényezőben: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$. **2.** A (2.57) $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ invariáns szimmetrikus bilineáris forma (\cdot szorzat). A \mathbb{C}^4 -beli kanonikus ortonormált bázisban vett komponensekben

$$\langle \xi, \eta \rangle = \bar{\xi}^I \delta_{IJ} \eta^J, \quad \xi \cdot \eta = \xi^I g_{IJ} \eta^J. \quad (2.100)$$

2.2. ábra. Az $A(BC)$ biseparálható állapotok geometriai ábrázolása.2.3. ábra. A teljesen szeparálható $(A)(B)(C)$ osztály geometriai ábrázolása.

Figyeljük meg, hogy a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat nem más mint a Bob és Charlie $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^4$ kombinált Hilbert térén indukálódó skalárszorzat. A továbbiakban az indexek le és felhúzását a (2.57)-ben definiált g_{IJ} mátrix és az inverze segítségével végezzük.

Alice (2.83) alapján számított ϱ_A marginálisából a (2.85) $\tau_{A(BC)}$ konkurrencianégyzetre kapjuk

$$\tau_{A(BC)} = 4(|\langle \xi, \eta \rangle|^2 - \|\xi\|^2 \|\eta\|^2). \quad (2.101)$$

A Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül és ekkor $\tau_{A(BC)} = 0$ akkor és csak akkor ha $\xi = c\eta$ ahol $c \in \mathbb{C}^\times$. Ekkor Alice qubitje szeparálható a BC rendszertől. A három qubit rendszer tehát $A(BC)$ szeparálható akkor és csak akkor ha ξ és η lineárisan összefüggők. Az $A(BC)$ szeparálhatóság geometriai szemléltetéséhez felhasználjuk azt, hogy a \mathbb{C}^4 -en adott (2.57) szimmetrikus bilineáris forma egy, a 2.2.5 fejezetben a két-qubit SLOCC klasszifikáció során már megismert, $Q \subset \mathbb{CP}^3$ kvadratikus felületet határoz meg. Ezen a felületen fekvő pontok a $(B)(C)$ szeparálható két qubit állapotoknak felelnek meg. Ha az $A(BC)$ típusú osztályban a BC részrendszer összefonódott akkor a megfelelő állapotot egy olyan pont ábrázolja mely *nem* fekszik a Q felületen, lásd 2.2 ábra. Hasonlóan az $(A)(B)(C)$ teljesen szeparálható állapotokat pedig egy a Q felületen lévő pont ábrázolja, lásd 2.3 ábra.

Tegyük most fel, hogy Alice qubitje nem szeparálható. Ekkor a ξ és η vektorok lineárisan függetlenek tehát \mathbb{C}^4 -ben egy *komplex síkot* határoznak meg. A 2.2.5 alfejezetben tárgyaltaknak megfelelően a négyesvektorok ekvivalenciaosztályainak megfelelő sugarakkal is dolgozhatunk. Ebben a projektív képben a ξ és η által kifeszített \mathbb{C}^4 -ben lévő *síknak* a \mathbb{CP}^3 komplex projektív térben lévő komplex projektív *egyenes*

$$L \equiv s\xi + t\eta, \quad s, t \in \mathbb{C} \quad (2.102)$$

felel meg.⁸ Ekkor definiálhatjuk az alábbi leképezést

$$f : |\Psi\rangle \rightarrow L = s\xi + t\eta, \quad s, t \in \mathbb{C}. \quad (2.103)$$

Természetesen ugyanazt a projektív egyenest \mathbb{CP}^3 -ban több $|\Psi\rangle$ három-qubit állapotból is megkaphatjuk. Valóban

$$|\Psi\rangle \mapsto \mathcal{A} \otimes I \otimes I |\Psi\rangle, \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow \xi \mapsto a\xi + b\eta, \quad \eta \mapsto c\xi + d\eta \quad (2.104)$$

tehát az Alice SLOCC transzformációival (jelöljük őket $SLOCC_A$ -val) kapható állapotok ugyanazt a projektív egyenest határozzák meg.

Az L projektív egyenesek alternatív jellemzésére bevezethetjük a P^{IJ} Plücker (*egyenes*) koordinátákat

$$P^{IJ} \equiv \xi^I \eta^J - \xi^J \eta^I. \quad (2.105)$$

A Plücker koordináták kielégítik a

$$P^{01}P^{23} - P^{02}P^{13} + P^{03}P^{12} = 0 \quad (2.106)$$

Plücker relációkat és a $SLOCC_A$ transzformációk során

$$P^{IJ} \mapsto (\text{Det } \mathcal{A}) P^{IJ} \quad (2.107)$$

módon transzformálódnak. Mivel a P^{IJ} -k is csak egy nemzérus komplex szám erejéig definiáltak a $SLOCC_A$ transzformációk során nem változnak. A fennmaradó $SLOCC_{BC}$ transzformációk tartalmazzák a $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \simeq Spin(4, \mathbb{C})$ komplex 4 dimenziós forgáscsoportot fedőcsoportját⁹. Ezekre a transzformációkra nézve a Plücker koordináták transzformációs szabálya

$$P^{IJ} \mapsto (SPS^T)^{IJ}, \quad S \in Spin(4, \mathbb{C}). \quad (2.108)$$

Ezek a transzformációk a $(1, -1)$ elemekből álló \mathbb{Z}_2 részcsoporthoz leszámlítva elforgatják az L projektív egyeneseket.

A (2.103) f leképezés segítségével minden háromqubit $SLOCC_A$ osztályhoz bijektív módon hozzárendelhetünk egy \mathbb{CP}^3 -beli egyenest. Szeretnénk a fenti egyenesek alkalmasan választott ekvivalenciaosztályait egy-egyértelmű módon megfeleltetni a fennmaradó négy¹⁰ SLOCC osztálynak. Ehhez elég azt megfigyelnünk, hogy a nem degenerált (2.102) L egyenes és a \mathcal{Q} felület viszonyára *négy* különböző lehetőségünk van.

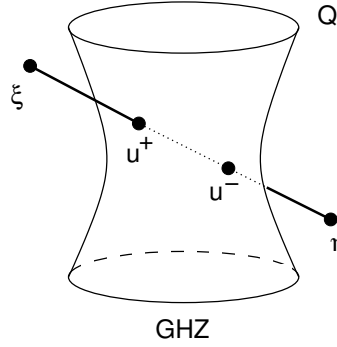
I. GHZ osztály. Tegyük fel, hogy ξ és η egyike sem fekszik a \mathcal{Q} felületen. Ez azt jelenti, hogy $\xi \cdot \xi \neq 0$ és $\eta \cdot \eta \neq 0$. Először azt az esetet tekintjük amikor L két pontban metszi \mathcal{Q} -t. A metszéspontok az u_{\pm} négyesvektorokkal jellemzett sugarak az úgynevezett *principális null irányok*. Az u_{\pm} vektorokat az

$$L \cdot L = a^2 \xi \cdot \xi + 2ab \xi \cdot \eta + b^2 \eta \cdot \eta = 0 \quad (2.109)$$

⁸Ha $\xi = c\eta$ akkor L egy ponttá degenerálódik. Ekkor a megfelelő \mathbb{CP}^3 -beli pont az előbb tárgyalt szeparálható osztályokat reprezentálja.

⁹Emlékeztetünk arra, hogy a valós esetben $SO(4) \simeq Spin(4)/\mathbb{Z}_2 \simeq (SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2$.

¹⁰A $|\Psi\rangle \equiv 0$ triviális osztályt nem számolva.



2.4. ábra. A GHZ osztály geometriai ábrázolása. Az L egyenes és a Q felület metszéspontjai a principális null irányokat adják.

egyenlet megoldásával kaphatjuk meg.¹¹ Két megoldást kapunk ha a fenti kvadratikus polinom diszkriminánsa nem zérus. A (2.97) egyenlet alapján a diszkrimináns épp Cayley hiperdeterminánsa. Valóban

$$\tau_{ABC} = 4|D(\Psi)| = 4|(\xi \cdot \eta)^2 - (\xi \cdot \xi)(\eta \cdot \eta)| = 2|P^{IJ}P_{IJ}|. \quad (2.110)$$

Tudjuk már, hogy

$$D(\Psi) \neq 0 \Leftrightarrow |\Psi\rangle \simeq_{SLOCC} |GHZ\rangle \quad (2.111)$$

ahol $|GHZ\rangle$ a (2.80) GHZ-állapot. Ebből az alábbi fontos eredmény következik: A $|\Psi\rangle$ három-qubit állapot által meghatározott L egyenes pontosan akkor metszi két pontban a Q felületet ha az állapot a GHZ osztályba tartozik. Eredményünket a 2.4 ábrán szemléltetjük.

A principális null irányok fizikai jelentésének tisztázásához a GHZ osztályban ($D \neq 0$) lévő állapotokra definiáljuk az új

$$\hat{\xi}^I \equiv i \frac{P^I{}_J \xi^J}{\sqrt{D}}, \quad \hat{\eta}^I \equiv i \frac{P^I{}_J \eta^J}{\sqrt{D}} \quad (2.112)$$

négyesvektorokat. Ezek a vektorok a (2.99) megfelelés útján egy $|\hat{\Psi}\rangle$ duális három-qubit állapotot definiálnak.

Vegyük észre, hogy a Plücker mátrix P^{IJ} kielégíti a

$$P^I{}_J P^J{}_K \xi^K = D \xi^I, \quad P^I{}_J P^J{}_K \eta^K = D \eta^I \quad (2.113)$$

egyenleteket. Ennek a felhasználásával megmutatható, hogy a duális állapotnak megfelelő négyesvektorokra teljesülnek még a

$$\xi \cdot \hat{\xi} = \eta \cdot \hat{\eta} = 0, \quad \xi \cdot \xi = \hat{\xi} \cdot \hat{\xi}, \quad \eta \cdot \eta = \hat{\eta} \cdot \hat{\eta}, \quad \xi \cdot \eta = \hat{\xi} \cdot \hat{\eta} \quad (2.114)$$

összefüggések is. Ebből (2.110) és (2.113) miatt következik, hogy a duális során D nem változik

$$D(\Psi) = D(\hat{\Psi}), \quad (2.115)$$

és

$$|\hat{\hat{\Psi}}\rangle = -|\Psi\rangle. \quad (2.116)$$

¹¹Mivel az L projektív egyenes épp a Riemann gömb $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ ezért az a/b vagy a b/a arányokat használhatjuk lokális inhomogén koordinátáknak. Ezekre az arányokra egy másodfokú egyenletet kapunk.

Teljesül még a későbbiekben fontos szerepet játszó

$$i\langle\bar{\Psi}|\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon|\hat{\Psi}\rangle=2\sqrt{D(\Psi)} \quad (2.117)$$

identitás ahol $\varepsilon = i\sigma_2$. A GHZ osztályba tartozó $|\hat{\Psi}\rangle$ duális állapot a SLOCC csoporttal szemben a $(2,2,2)$ ábrázolás szerint¹² transzformálódó kovariáns mennyiség.

Tekintsük most a

$$u_{\pm}^I = \xi^I \pm i\hat{\xi}^I, \quad v_{\pm}^I = \eta^I \pm i\hat{\eta}^I \quad (2.118)$$

négyesvektorokat. Rövid számolás mutatja, hogy u_{\pm} és v_{\pm} nem függetlenek, nevezetesen

$$v_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{D} + \eta \cdot \xi}{\xi \cdot \xi} u_{\pm} = \frac{\eta \cdot \eta}{\mp\sqrt{D} + \eta \cdot \xi} u_{\pm}. \quad (2.119)$$

Az u_{\pm} és v_{\pm} vektorok tehát ugyanazt a két \mathbb{CP}^3 -beli pontot határozzák meg. A fenti vektorok explicit alakjából az is látható hogy az ezeknek megfelelő \mathbb{CP}^3 -beli pontok egyúttal a (2.102) L egyenes speciális pontjai. Valóban a (2.114) felhasználásával rögtön következik, hogy $u_{\pm} \cdot u_{\pm} = v_{\pm} \cdot v_{\pm} = 0$ pontjaink tehát rajta vannak a \mathcal{Q} felületen is. Az u_{\pm} vektorok tehát a principális null irányokat adják¹³. Érdemes még megjegyezni, hogy az elnevezéssel összhangban $P^I_J u_{\pm}^J = \pm i\sqrt{D} u_{\pm}^I$ azaz a null irányok a P^I_J Plücker mátrix sajátvektorai.

Térjünk át a principális null irányok fizikai jelentésének tisztázására. A (2.118) képletből kapjuk, hogy

$$\xi^I = \frac{1}{2}(u_+^I + u_-^I), \quad \eta^I = \frac{1}{2}(v_+^I + v_-^I). \quad (2.120)$$

Ebből következik, hogy a GHZ osztályba tartozó vektorokat mindig felírhatjuk két állapotvektor összegeként. Mivel $u_{\pm} = cv_{\pm}$, $c \in \mathbb{C}^{\times}$ és $u_{\pm} \cdot u_{\pm} = v_{\pm} \cdot v_{\pm} = 0$ ezért a felbontásban szereplő két komponens mindegyike teljesen szeparálható $(A)(B)(C)$ típusú állapot. Az állapotot utólag normálva azt kapjuk, hogy a ξ és η komponensekkel és $D \neq 0$ feltétellel jellemzett $|\Psi\rangle$ állapot mindig felírható a

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_+\rangle \otimes |b_+\rangle \otimes |c_+\rangle + |a_-\rangle \otimes |b_-\rangle \otimes |c_-\rangle) \quad (2.121)$$

kanonikus (2.80) GHZ állapot alakjában ahol a szeparálható faktorok ortonormált bázisvektorok. A (2.112) és a (2.118) definíciók a teljesen szeparálható GHZ komponensek meghatározására explicit eljárást adnak.

Megjegyezzük, hogy a kiinduló $\xi \cdot \xi \neq 0$, $\eta \cdot \eta \neq 0$ feltétel nem jelent lényeges megszorítást. Hiszen amennyiben L két pontban metszi \mathcal{Q} -t akkor csak az a két eset marad amikor mind a ξ és η vagy csak egyikük \mathcal{Q} -n van. Az első esetben az állapot már eleve kanonikus alakban van, a másodikban a már eleve \mathcal{Q} -n lévő pontot fixen hagyó alkalmas $SLOCC_A$ transzformációval a kívánt alakot kaphatjuk.

II. W osztály. Az L egyenes egy pontban is érintheti a \mathcal{Q} felületet. Ekkor egy principális null irány van. Ezt az esetet szemlélteti a (2.5) ábra. Tegyük fel most is, hogy $\xi \cdot \xi \neq 0$ és $\eta \cdot \eta \neq 0$. A (2.109) egyenletből egy principális null irányt kapunk akkor és csak akkor ha $D = 0$. Ekkor (2.110) miatt $\eta \cdot \xi \neq 0$. Innen azt is látjuk, hogy a (2.112) definícióban szereplő

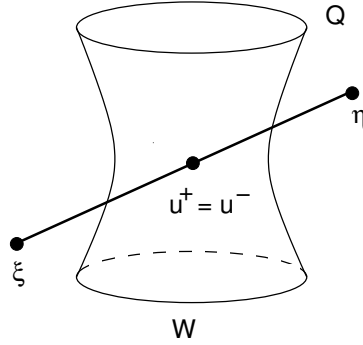
$$\tilde{\xi}^I \equiv -P^I_J \xi^J = -(\eta \cdot \xi)\xi^I + (\xi \cdot \xi)\eta^I, \quad (2.122)$$

$$\tilde{\eta}^I \equiv -P^I_J \eta^J = -(\eta \cdot \eta)\xi^I + (\eta \cdot \xi)\eta^I \quad (2.123)$$

mennyiségek egyike sem zérus. Megmutatható, hogy ez a 8 (az eredeti amplitudókban köbös) kifejezés is a SLOCC csoport $(2,2,2)$ ábrázolása szerint transzformálódó kovariáns. Célszerű tehát ezt a 8 komplex számot is egy három-qubit állapot amplitudójaiként felfogni. Jelöljük ezt

¹²Lásd a (2.79) transzformációs szabályt.

¹³Az u_{\pm} és v_{\pm} vektorokat a (2.109) a/b illetve b/a arányokra történő megoldásával is megkaphatjuk.



2.5. ábra. A W osztály geometriai ábrázolása. Az L egyenes az egyetlen principális null iránynak megfelelő pontban érinti a Q felületet.

az állapotot $|\tilde{\Psi}\rangle$ -vel¹⁴. Tehát ha L egy pontban metszi Q -t akkor $D = 0$ és $|\tilde{\Psi}\rangle \neq 0$. Könnyen belátható az is, hogy a (2.5) ábrán látható szituáció pontosan akkor teljesül ha $D = 0$ és $|\tilde{\Psi}\rangle \neq 0$. Megmutatható [BDD⁺09b], hogy

$$D(\Psi) = 0, \quad |\tilde{\Psi}\rangle = 0 \Leftrightarrow |\Psi\rangle \simeq_{SLOCC} |W\rangle \quad (2.124)$$

ahol $|W\rangle$ a (2.81) állapot. A $|\Psi\rangle$ három-qubit állapot által meghatározott L egyenes pontosan akkor metszi egy pontban a Q felületet ha az állapot a W osztályba tartozik. Az eredményt a 2.5 ábra szemlélteti. Ebben az esetben egyetlen principális null irány van mely akár a $\tilde{\xi}$ akár az $\tilde{\eta}$ vektornak (ezek ismét arányosak) választható¹⁵.

III.-IV. C(AB) és B(AC) osztályok. Először is emlékeztetünk arra, hogy az egyik qubit szeparálhatóságának a szükséges és elégséges feltétele a (2.85)-ben definiált konkurrencia négyzetek egyikének eltűnése. Legyen $\tau_+ \equiv \tau_{C(AB)}$ és $\tau_- \equiv \tau_{B(AC)}$. Az A(BC) biszeparálható osztályt már jellemeztük feltesszük tehát, hogy $\tau_{A(BC)} \neq 0 \Leftrightarrow \xi \neq c\eta$. Megmutatható, hogy [2]

$$\tau_{\pm} = |\xi \cdot \xi|^2 + |\eta \cdot \eta|^2 + 2|\xi \cdot \eta|^2 + (P^{IJ} \mp *P^{IJ})\bar{P}_{IJ}, \quad (2.125)$$

ahol

$$*P^{IJ} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}P_{KL}. \quad (2.126)$$

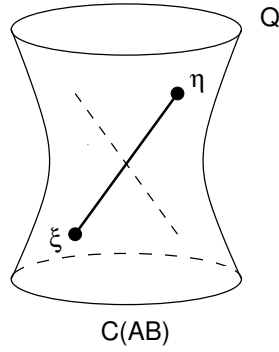
Megjegyezzük, hogy az $*P$ mátrix is kielégíti a (2.106) Plücker relációkat. Ezek tehát egy másik $*L$ egyenes koordinátáit adják.

Ezen előkészületek után legyen most a (2.102) egyenes teljes egészében a Q felületen. Az ilyen egyeneseket *izotróp egyeneseknek* nevezzük. Ezekre az egyenesekre $L \cdot L = 0$ ezért $\xi \cdot \xi = \eta \cdot \eta = \xi \cdot \eta = 0$. Izotróp egyenesekből két fajta van [HH83] Az úgynevezett α -egyenesekre $P = *P$, azaz ezekre a Plücker mátrix *önduális*. Hasonlóan a β -egyenesekre $P = -*P$ ekkor a Plücker mátrix *anti-önduális*. Tehát a (2.125) kifejezésből következően ha az L egyenes izotróp akkor vagy $\tau_+ = 0$ vagy $\tau_- = 0$. Megfordítva: tudjuk, hogy a (2.125) kifejezés minden tagja nemnegatív.¹⁶ Ezért $\tau_{\pm} = 0$ -ból következik, hogy az L egyenes izotróp és az L -et jellemző P

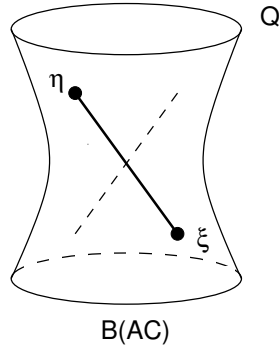
¹⁴ $|\tilde{\Psi}\rangle$ természetesen csak az i/\sqrt{D} faktorban különbözik a (2.112) definíció alapuló $|\hat{\Psi}\rangle$ duális állapottól. Az utóbbi állapot csak a GHZ osztályra értelmezett és a $\Psi \mapsto c\Psi$ nyújtás során ugyancsak $\hat{\Psi} \mapsto c\hat{\Psi}$ módon transzformálódik.

¹⁵ $\tilde{\xi} \cdot \tilde{\xi} = \tilde{\eta} \cdot \tilde{\eta} = 0$.

¹⁶Megmutatható, hogy $\text{Tr}(\varrho_{\pm}\tilde{\varrho}_{\pm}) = (P^{IJ} \mp *P^{IJ})\bar{P}_{IJ}$ ahol $\varrho_+ = \varrho_{AB}$ és $\varrho_- = \varrho_{AC}$. Belátható, hogy a $\varrho_{\pm}\tilde{\varrho}_{\pm}$ mátrix sajátértékei nemnegatívak [Woo98].



2.6. ábra. A $C(AB)$ biszeparálható osztály geometriai ábrázolása. Az L egyenes teljes egészében a Q felületen az α típusú egyenesek osztályában fekszik.



2.7. ábra. A $B(AC)$ biszeparálható osztály geometriai ábrázolása. Az L egyenes teljes egészében a Q felületen a β típusú egyenesek osztályában fekszik.

mátrixra vagy $P = *P$ vagy $P = -*P$ teljesül. Azonban az utóbbi két feltétel nem ad új megszorítást hiszen például $\xi^I P_{IJ} = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} \xi^I P^{KL} = 0$. Ebből következően a (2.122) kifejezés jobboldalára zérust kapunk. Mivel állapotunk nem $A(BC)$ szeparálható ezért $\xi \neq c\eta$ ahol $c \in \mathbb{C}^\times$ és $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$. Ebből következően $\xi \cdot \xi = \xi \cdot \eta = 0$. Hasonlóan $\eta^I P_{IJ} = 0$ kiértékelése után kapjuk, hogy $\eta \cdot \eta = 0$. Ezek a feltételek ismét L izotrópságát fejezik ki. Az izotróp egyenesek tehát *pontosan* a $C(AB)$ vagy $B(AC)$ szeparálható állapotokat reprezentálják. Tehát a $|\Psi\rangle$ három-qubit állapot által meghatározott L egyenes pontosan akkor helyezkedik el a Q felületen ha az állapot vagy a $C(AB)$ vagy a $B(AC)$ osztályba tartozik. Az eredményt a 2.6 és a 2.7 ábra szemlélteti.

A (2.2)-(2.7) ábrák összefoglalják a nemtriviális három-qubit SLOCC osztályok geometriáját abban a képben ahol Alice qubitja kitüntetett szerepet játszik. A geometriai reprezentáció lényege: a $|\Psi\rangle$ három qubit állapotnak megfelelő (2.102) L egyenes¹⁷ és a Q kvadratikuss felület viszonyának jellemzése.

¹⁷Most az egy ponttá degenerálódott „egyeses” lehetőségét is megengedjük.

2.5.4. Twistor geometriai analógia [2, 4]. Figyeljük meg, hogy a fenti geometriai klasszifikációban alapvető szerepet játszó \mathcal{Q} felület megadása ekvivalens a (\mathbb{C}^4, g) pár rögzítésével, ahol g a (2.57) szimmetrikus bilineáris forma. A \mathcal{Q} felületen fekvő ξ vektorokra $g(\xi, \xi)$ a zérus értéket veszi fel. Ez a tulajdonság a Minkowski téridőbeli fényszerű vektorok viselkedésére emlékeztet.

Próbáljuk most meg a fenti klasszifikációban szereplő nemtriviális L egyeneseken alapuló **I.-IV.** osztályokat a \mathcal{Q} felület bevezetése *nélkül* jellemezni. Nem degenerált L egyenesek esetén a P Plücker-koordináták nemzérusok és kielégítik a (2.105)-(2.108) összefüggéseket. A (2.105) definíció alapján hat komplex koordinátánk van melyeket \mathbb{C}^6 elemeinek tekintünk. Koordinátáink csak egy nemzérus komplex számszorzó erejéig értelmezettek tehát $P \in \mathbb{CP}^5$. Teljesül azonban még a (2.106) Plücker-reláció is mely egy újabb kvadratikus \mathcal{K} felületet ad mely ezúttal \mathbb{CP}^5 -ben helyezkedik el. Ezt a \mathcal{K} felületet *Klein felületnek* nevezzük. Tehát az **I.-IV.** osztályokat jellemző P rajta van a Klein felületen: $P \in \mathcal{K} \subset \mathbb{CP}^5$. A \mathcal{K} Klein felület egy 4 komplex dimenziós kompakt sokaság mely homeomorf az M^\sharp kompaktifikált komplexifikált Minkowski téridővel¹⁸.

Tekintsük most a (2.126) képlettel értelmezett duális $*P$ Plücker koordinátákat. Ezek egy másik, duális $*L$ egyenes koordinátáinak felelnek meg. Figyeljük meg, hogy a (2.126) formulában szereplő P_{IJ} alsó indexek megjelenése miatt $*L$ definíciója a g (2.57) bilineáris formával kapcsolatos. Ebben a képben tehát az L és \mathcal{Q} elhelyezkedésére vonatkozó információ az L és $*L$ egyenesek egymáshoz való viszonyában található.

Tekinthetjük tehát az alábbi *Klein-megfelelést*. Egy $|\Psi\rangle$ három-qubit állapotnak megfelelő tethetünk **két** \mathbb{CP}^3 -ban fekvő L és $*L$ **egyenes**et, vagy a \mathcal{K} Klein felületen fekvő **két** P és $*P$ **pont**ot. Figyeljük meg, hogy a megfelelés nemlokális abban az értelemben, hogy az egyik esetben a három-qubit állapotnak két egyenest a másik esetben két pontot feleltetünk meg.

A Klein felületet jellemző (2.106) kvadratikus forma polarizálásával egy $G : \mathbb{C}^6 \times \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$ szimmetrikus nemdegenerált bilineáris formát kaphatunk. A forma explicit alakja

$$G(P, Q) = \frac{1}{2} (P^{01}Q^{23} + Q^{01}P^{23} - P^{02}Q^{13} - Q^{02}P^{13} + P^{03}Q^{12} + Q^{03}P^{12}) \quad (2.127)$$

ahol $P^{IJ} = a^I b^J - a^J b^I$ és $Q^{IJ} = c^I d^J - c^J d^I$ a két egyenesnek megfelelő Plücker koordináták. A bilineáris formát felírhatjuk a kompakt

$$G(P, Q) = \frac{1}{8} \epsilon_{IJKL} P^{IJ} Q^{KL} = \frac{1}{4} \epsilon_{IJKL} a^I b^J c^K d^L \quad (2.128)$$

alakban. Innen látható, hogy ha az a, b, c és d négyesvektorok lineárisan függetlenek akkor $G(P, Q) \neq 0$. Ekkor a \mathbb{C}^4 -ben fekvő megfelelő síkok, azaz a \mathbb{CP}^3 -ban fekvő megfelelő egyenesek *nem metszik egymást*. Ha $G(P, Q) = 0$ akkor a megfelelő egyenesek vagy egy pontban metszik egymást vagy egybeesnek.

Legyenek most P^{IJ} és $*P^{IJ}$ a $|\Psi\rangle$ három-qubit állapotnak megfelelő két egyenes Plücker koordinátái. Ekkor

$$Q(P, *P) = -\frac{1}{4} D(\Psi). \quad (2.129)$$

Ennek alapján látható, hogy az L és $*L$ egyenesek pontosan akkor nem metszik egymást ha a $|\Psi\rangle$ a GHZ osztályban van. Pontosán akkor metszik egy pontban egymást ha a $|\Psi\rangle$ a W osztályban van. Végezetül ha az egyenesek „egybeesnek” akkor két lehetőségünk van. $*L = L$ akkor és csak

¹⁸ A twistor elméletben [Pen67, WW91, HH83] a szokásos valós, nemkompakt Minkowski téridőt egy „végtelenben fekvő fénykúp” hozzáadásával konform kompaktifikálják. Az eljárás hasonló a nemkompakt komplex sík azon egy pont kompaktifikációjához melynek során sztereografikus projekcióval a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Riemann-féle gömböt képezzük. A kapott \mathcal{M}^\sharp valós 4 dimenziós sokaság a 4 komplex dimenziós M^\sharp alkalmasan választott valós része.

akkor ha $|\Psi\rangle$ a $C(AB)$ osztályba illetve $*L = -L$ akkor és csak akkor ha a $B(AC)$ osztályba tartozik¹⁹.

A Klein-megfelelés felhasználásával a fenti eredményeket másképpen is megfogalmazhatjuk. A \mathbb{CP}^3 -beli L és $*L$ egyeneseknek a Klein-felületen a P és $*P$ pontok felelnek meg. Ha az egyenesek nem metszik egymást akkor a megfelelő P és $*P$ pontok

$$G(P - *P, P - *P) = -2Q(P, *P) = \frac{1}{2}D(\Psi) \quad (2.130)$$

„távolsága” nem zérus²⁰. Hasonlóan ha L és $*L$ egy pontban metszik egymást akkor P és $*P$ „távolsága” zérus, másképp szólva P és $*P$ fényszerűen szeparáltak. Az elnevezés valóban jogos hiszen $\mathcal{K} \simeq M^\sharp$, és $G(P - Q, P - Q)$ a szokásos Minkowski-féle távolság alakjára hozható²¹.

Érdemes megjegyezni, hogy a Klein felületen alapuló képből a $\tau_{ABC} = 4|D(\Psi)|$ hármas összefonás (2.130) alapján mint a $(P, *P)$ pontpár Minkowski-szerű távolsága jelenik meg. Továbbá a szeparálható osztályokat nem számítva a két valódi három-qubit összefonódottságot reprezentáló W és GHZ osztályok pontpárjai fényszerű és nem fényszerű szeparációval jellemezhetők. A következő fejezetben három rebit összefonódottságát vizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy ebben az esetben az \mathbb{R} felett a GHZ osztály további két SLOCC inekvivalens osztályra bomlik. Az egyikre $D(\Psi) > 0$ a másikra $D(\Psi) < 0$. Ekkor tehát már három osztályunk van. A GHZ_+ osztály felel meg a **térszerű** a GHZ_- osztály az **időszerű** és a W osztály továbbra is a **fényszerű** szeparációval rendelkező $(P, *P)$ pontpárnak. Ez a helyzet analóg azzal amikor a komplexifikált M^\sharp Minkowski téridő helyett az alkalmasan választott \mathcal{M}^\sharp valós Minkowski téridőt tekintjük ahol már beszélhetünk térszerű és időszerű szeparációról is.

A twistor elméletet Roger Penrose eredetileg abból a célból fejlesztette ki, hogy a téridő-geometria kvantálására egy új nemlokális módszert adjon. Az elméletben a szokásos téridő sokaság helyett az úgynevezett projektív twisztortér játsza a fő szerepet. Minkowski téridő esetén a twisztortér a CP^3 komplex projektív tér. A Klein-megfelelés segítségével a téridővel kapcsolatos struktúrákat a twisztortérrel kapcsolatos struktúrákba alakíthatjuk és viszont. Meglepő, hogy a legelemibb többrészrendszeres összefonódottság geometriáját legelegánsabban a twistor elmélet kapcsán bevezetett struktúrák írják le.

2.5.5. Valós három-qubit állapotok [4, 15]. Három-rebit rendszerek esetén a Ψ_{abc} amplitudók valós számok. Ennek megfelelően a (2.99) definícióban szereplő ξ és η vektorok valósak, tehát $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$. A SLOCC csoport most $GL(2, \mathbb{R})^{\times 3}$, a SLOCC összefonódottsági osztályok a (2.79)-ban megadott ekvivalenciaosztályok, ahol most $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \in GL(2, \mathbb{R})^{\times 3}$. Ekkor a SLOCC klasszifikáció eredménye az alábbi [AAC⁺00, AAJT01]. A GHZ osztályt leszámítva ugyanazokat az összefonódottsági osztályokat kapjuk, a GHZ osztály pedig további két inekvivalens GHZ_+ és GHZ_- osztályra bomlik. A GHZ_+ osztály elemeire $D(\Psi) > 0$, a GHZ_- osztály elemeire pedig $D(\Psi) < 0$.

Valóban a (2.112) definícióból láthatóan $D(\Psi) < 0$ esetén $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in \mathbb{R}^4$, ezért a (2.118) képletben szereplő $u_\pm \in \mathbb{C}^4$ principális null irányok egymás komplex konjugáltjai. Hasonlóan $D(\Psi) > 0$ -ra $u_\pm \in \mathbb{R}^4$ ekkor két valós null irányt kapunk. A két eset nyilván valós SLOCC inekvivalens, jóllehet komplex SLOCC ekvivalens.

Érdemes a fenti eredményt a megfelelő összefonódottsági osztályok reprezentánsainak explicit megadásával szemléltetni. Tekintsük az alábbi két három-rebit állapotot

$$|GHZ\rangle_- = \frac{1}{2}(|000\rangle - |011\rangle - |101\rangle - |110\rangle) \quad (2.131)$$

¹⁹Az $*L = \pm L$ jelölés természetesen most arra utal, hogy a megfelelő P^{IJ} Plücker mátrixok önduálisak vagy anti önduálisak.

²⁰A Plücker relációk miatt $G(P, P) = G(*P, *P) = 0$.

²¹Lásd például Hughston és Hurd összefoglaló munkájának [HH83] 3.1. fejezetét.

$$|GHZ\rangle_+ = \frac{1}{2}(|000\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle). \quad (2.132)$$

Figyeljük meg, hogy (2.92) alapján a *második* állapotra $D(\Psi) > 0$ és

$$|GHZ_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle \otimes |\alpha\rangle + |\beta\rangle \otimes |\beta\rangle \otimes |\beta\rangle) \quad (2.133)$$

ahol

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (2.134)$$

Ezt a diszkrét Fourier transzformációval kapcsolatos Hadamard mátrix segítségével az alábbi alakban is felírhatjuk

$$|GHZ_+\rangle = (H \otimes H \otimes H)|GHZ\rangle, \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.135)$$

Ez a képlet azt mutatja, hogy a $|GHZ_+\rangle$ állapot a szokásos (2.80) $|GHZ\rangle$ állapottal valós SLOCC ekvivalens.

A másik állapotra $D(\Psi) < 0$ ekkor

$$|GHZ\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\omega\rangle \otimes |\omega\rangle \otimes |\omega\rangle + \overline{|\omega\rangle} \otimes \overline{|\omega\rangle} \otimes \overline{|\omega\rangle}), \quad |\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), \quad (2.136)$$

vagy

$$|GHZ_-\rangle = (U \otimes U \otimes U)|GHZ\rangle, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \quad (2.137)$$

Ez a képlet azt mutatja, hogy a $|GHZ_-\rangle$ *komplex* SLOCC ekvivalens a $|GHZ\rangle$ állapottal. A (2.135) és a (2.137) formulákból láthatóan a $|GHZ_+\rangle$ és $|GHZ_-\rangle$ valós SLOCC inekvivalens állapotok.

Vizsgáljuk meg most a $D(\Psi) < 0$ esetet. A (2.136) formulából látható, hogy a $|GHZ_-\rangle$ valós állapot kanonikus GHZ alakja *komplex*, ahol a kanonikus alak teljesen szeparálható két komponense egymás komplex konjugáltja. Tehát adott $|\Psi\rangle \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$, $D(\Psi) < 0$ esetén definiálni tudunk két olyan (A)(B)(C) szeparálható állapotot melyre az egyik $|\omega\rangle \otimes |\omega\rangle \otimes |\omega\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ a másik ezen állapot komplex konjugáltja.

Legyen $D(\Psi) < 0$ ekkor könnyen belátható, hogy a (2.113) összefüggés a

$$S_\Psi^2 \otimes I \otimes I |\Psi\rangle = -|\Psi\rangle \quad (2.138)$$

alakba is írható ahol

$$S_\Psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-D}} \begin{pmatrix} \xi \cdot \eta & -\xi \cdot \xi \\ \eta \cdot \eta & -\xi \cdot \eta \end{pmatrix}. \quad (2.139)$$

Figyeljük meg, hogy S_Ψ az első rebiten hat, és (2.110) miatt $S_\Psi^2 = -I$. A (2.139) mátrixhoz hasonlóan definiálhatunk két másik mátrixot is, legyenek ezek T_Ψ és U_Ψ . Ezeknek az új mátrixoknak²² az alakja azonos a (2.138)-ban megismerttél csak a \cdot szorzat értelmezése változik. T_Ψ most Bob qubitjén hat és definíciójában szereplő (2.57) \cdot szorzat most az A és C részrendszereknek megfelelő $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -n megadott új bilineáris formával kapcsolatos. Hasonlóan U_Ψ Charlie qubitjén hat és ekkor a \cdot szorzat definíciója az A és B rendszerekkel kapcsolatosan módosul²³.

Legyen most

$$J_\Psi \equiv S_\Psi \otimes T_\Psi \otimes U_\Psi \in SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}). \quad (2.140)$$

²²A mátrixok elnevezése a FLYQM kapcsán ismerttetendő STU modellel van kapcsolatban.

²³A T_Ψ -ben szereplő $\xi \cdot \eta = \Psi_{000}\Psi_{111} - \Psi_{001}\Psi_{110} - \Psi_{100}\Psi_{011} + \Psi_{101}\Psi_{010}$, az U_Ψ -ben szereplő $\xi \cdot \eta = \Psi_{000}\Psi_{111} - \Psi_{010}\Psi_{101} - \Psi_{100}\Psi_{011} + \Psi_{110}\Psi_{001}$, míg az S_Ψ -ben a már megszokott (2.99) és (2.57)-n alapuló $\xi \cdot \eta = \Psi_{000}\Psi_{111} - \Psi_{001}\Psi_{110} - \Psi_{010}\Psi_{101} + \Psi_{011}\Psi_{100}$ képlet érvényes.

Ekkor

$$\mathcal{J}_\Psi^2 = -I \otimes I \otimes I. \quad (2.141)$$

A $\mathcal{J}_\Psi \in \text{End}(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)$ leképezés tehát egy Ψ -től függő komplex strukturát ad meg a három-rebit állapotterén. Például a (2.131) állapotra

$$\mathcal{J}_{GHZ_-} = \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon. \quad (2.142)$$

Megjegyezzük még, hogy amennyiben a \mathcal{J}_Ψ leképezést magára a $|\Psi\rangle$ állapotra hattatjuk akkor a GHZ osztályban értelmes (2.112) definíció és a (2.116) tulajdonság miatt kapjuk, hogy

$$|\hat{\Psi}\rangle = \mathcal{J}_\Psi |\Psi\rangle. \quad (2.143)$$

Innen a GHZ_- osztályban lévő állapotokra a (2.115) tulajdonság egyből látható.

2.5.6. A Coffmann-Kundu-Wootters reláció geometriája [2]. A három-qubit állapotokkal kapcsolatos vizsgálódásaink lezárásaként tekintsük az összefonódottság megosztásával kapcsolatos (2.96) Coffmann-Kundu-Wootters relációt. Legyen

$$\begin{pmatrix} \Psi_{000} & \Psi_{001} \\ \Psi_{010} & \Psi_{011} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^0 & \xi^1 \\ \xi^2 & \xi^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Z^0 - iZ^3 & Z^2 - iZ^1 \\ -Z^2 - iZ^1 & Z^0 + iZ^3 \end{pmatrix} \quad (2.144)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_{100} & \Psi_{101} \\ \Psi_{110} & \Psi_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^0 & \eta^1 \\ \eta^2 & \eta^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W^0 - iW^3 & W^2 - iW^1 \\ -W^2 - iW^1 & W^0 + iW^3 \end{pmatrix}. \quad (2.145)$$

A $\xi^I = U^I_\Lambda Z^\Lambda$, $\eta^I = U^I_\Lambda W^\Lambda$ bázistranszformáció unitér ezért

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle Z, W \rangle = \bar{Z}^0 W^0 + \bar{Z}^1 W^1 + \bar{Z}^2 W^2 + \bar{Z}^3 W^3 \quad (2.146)$$

ahol felhasználtuk a (2.100) Hermitikus skalárszorzatot. Azonban

$$\xi \cdot \eta = Z^0 W^0 + Z^1 W^1 + Z^2 W^2 + Z^3 W^3. \quad (2.147)$$

Láthatóan az új bázisban a \cdot szorzás a közösleges $SO(4, \mathbb{C})$ invariáns skalárszorzás. Mivel a régi bázisban a \cdot szorzat $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ invariáns volt, ezért a fenti báziscsere a $SO(4, \mathbb{C}) \simeq SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ izomorfizmust illusztrálja. A bevezetett új bázis a kvantum információelméletben „mágikus bázis” néven ismeretes [KasidZ01a]. Könnyen belátható, hogy a báziscsere a $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ szeparálható bázisról a (2.73)-(2.74) Bell-állapotok maximálisan összefonódott²⁴ bázisára való áttérésnek felel meg.

Jelöljük a Plücker mátrix mágikus bázisbeli koordinátáit $P^{\Lambda\Sigma}$ -vel. Ekkor a (2.101) és a (2.110) egyenletek új alakja

$$\tau_{A(BC)} = 2\bar{P}^{\Lambda\Sigma} P_{\Lambda\Sigma}, \quad \tau_{ABC} = 2|P^{\Lambda\Sigma} P_{\Lambda\Sigma}| \quad (2.148)$$

ahol most (2.146) és (2.147) miatt az indexek lehúzása $\delta_{\Lambda\Sigma}$ -val történik. Láthatóan (2.96)-val összhangban $\tau_{ABC} \leq \tau_{A(BC)}$. Valóban az egyenlőtlenség baloldalán hat komplex szám négyzetösszegének abszolútértéke, a jobb oldalán pedig hat komplex szám abszolútérték négyzetének összege áll. A (2.90) formulák szerint a τ_{ABC} -ben jelenlévő interferencia tagoknak a $\tau_{AB} + \tau_{AC}$ -ben lévő kevert állapotú konkurrenciák négyzetek felelnek meg. Az interferencia tagok eltűnésekor $\tau_{ABC} = \tau_{A(BC)}$, azaz ekkor a kevert állapotú konkurrenciák zérusok. Ez történik meg a (2.80) kanonikus GHZ állapot esetén. Ekkor A ugyan összefonódott a kombinált BC rendszerrel, külön-külön azonban egyikükkel sem.

²⁴ A szokásos Bell-állapotokat még alkalmas fázisfaktorokkal kell szorozni.

2.6. Négy qubit rendszerek

2.6.1. Polinom invariánsok [3] Egy négy-qubit állapotot az alábbi alakba írhatunk

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b,c,d=0,1} \Psi_{abcd} |abcd\rangle, \quad |abcd\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_D \quad (2.149)$$

ahol $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_D \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes 4} \simeq \mathbb{C}^{16}$. A részrendszerek Alice, Bob, Charlie és Daisy részrendszerei. A SLOCC ekvivalencia szokásos definíciója ismét

$$|\Psi\rangle \simeq_{SLOCC} |\Phi\rangle \Leftrightarrow |\Psi\rangle = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{D} |\Phi\rangle, \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \in GL(2, \mathbb{C})^{\times 4}. \quad (2.150)$$

Láttuk, hogy a SLOCC összefonódottsági osztályok jellemzésében fontos szerepet játszanak a SLOCC csoport relatív invariánsai. Ezek az $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ SLOCC alcsoporttal szemben invariáns mennyiségek. A három-qubit rendszereknél az egyetlen ilyen algebrailag független invariáns Cayley hiperdeterminánsa volt. A négy-qubit rendszerek esetén ismeretes, hogy az algebrailag független invariánsok száma négy [LT03]. Az alapvető invariánsok közül egy másodrendű, kettő negyedrendű, és egy hatodrendű. A $2 \times 2 \times 2 \times 2$ „hiperkocka” determinánsa (a Cayley hiperdetermináns megfelelő általánosítása [GK94]) most is definiálható látni fogjuk azonban, hogy most ez a 24-ed rendű mennyiség nem független, hanem kifejezhető az alacsonyabbrendű független invariánsok segítségével [LT03, 3].

Vegyük sorra az algebrailag független invariánsokat [3]. Ismét a három-qubit rendszereknél megismert módszert választjuk és két qubitnek kitüntetett szerepet adunk. Legyen ez a két qubit Alice és Bob qubitja. Ennek megfelelően $|\Psi\rangle$ -hez az alábbi 4×4 -es mátrixot rendeljük.

$$\mathcal{L} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{0000} & \Psi_{0001} & \Psi_{0010} & \Psi_{0011} \\ \Psi_{0100} & \Psi_{0101} & \Psi_{0110} & \Psi_{0111} \\ \Psi_{1000} & \Psi_{1001} & \Psi_{1010} & \Psi_{1011} \\ \Psi_{1100} & \Psi_{1101} & \Psi_{1110} & \Psi_{1111} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U^0 & U^1 & U^2 & U^3 \\ V^0 & V^1 & V^2 & V^3 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ Z^0 & Z^1 & Z^2 & Z^3 \end{pmatrix}. \quad (2.151)$$

A fentiekben 4 négyesvektort ($U^I, V^I, W^I, Z^I, I = 0, 1, 2, 3$) is definiáltunk. Látjuk, hogy az első két qubit indexe mondja meg, hogy melyik négyesvektorról van szó. A maradék két-qubit indexek a négyesvektorok komponenseit címkézik. Szükségünk lesz még az

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} U^0 & U^1 & V^0 & V^1 \\ W^0 & W^1 & Z^0 & Z^1 \\ U^2 & U^3 & V^2 & V^3 \\ W^2 & W^3 & Z^2 & Z^3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} U^0 & U^2 & V^0 & V^2 \\ U^1 & U^3 & V^1 & V^3 \\ W^0 & W^2 & Z^0 & Z^2 \\ W^1 & W^3 & Z^1 & Z^3 \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

mátrixokra is. Az \mathcal{M} és \mathcal{N} mátrixok az \mathcal{L} mátrixból az $(ABC)(D)$ és a $(A)(BCD)$ permutációk segítségével kaphatók, a három mátrix index szerkezete tehát

$$\mathcal{L} \leftrightarrow \Psi_{abcd} \quad \mathcal{M} \leftrightarrow \Psi_{bcad} \quad \mathcal{N} \leftrightarrow \Psi_{acdb}. \quad (2.153)$$

A fenti mátrixok az alábbi marginálisokban jelennek meg

$$\varrho_{AB} \equiv \text{Tr}_{CD} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathcal{L}\mathcal{L}^\dagger \quad \varrho_{BC} \equiv \text{Tr}_{AD} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger \quad (2.154)$$

$$\varrho_{AC} \equiv \text{Tr}_{BD} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathcal{N}\mathcal{N}^\dagger \quad \bar{\varrho}_{CD} \equiv \text{Tr}_{AD} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathcal{L}^\dagger \mathcal{L} \quad (2.155)$$

$$\bar{\varrho}_{AD} \equiv \text{Tr}_{BC} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} \quad \bar{\varrho}_{BD} \equiv \text{Tr}_{AC} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \mathcal{N}^\dagger \mathcal{N}. \quad (2.156)$$

Feltesszük, hogy a Charlie és Daisy részrendszereinek megfelelő $\mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -en adva van a szokásos (2.58) g forma. Az U, V, W és Z segítségével g általi index lehúzás után definiálhatjuk az alábbi duális négyesvektorokat

$$u^I = \epsilon^{IJKL} V_J W_K Z_L \quad v^J = \epsilon^{IJKL} U_I W_K Z_L \quad (2.157)$$

$$w^K = \epsilon^{IJKL} U_I V_J Z_L \quad z^L = \epsilon^{IJKL} U_I V_J W_K \quad (2.158)$$

ahol $\epsilon^{0123} = +1$. Az u, v, w és z vektorokkal definiálhatunk egy $|\psi\rangle$ duális négy-qubit állapotot is

$$|\psi\rangle = \sum_{abcd} \psi_{abcd} |abcd\rangle \quad (2.159)$$

ahol

$$\begin{pmatrix} \psi_{0000} & \psi_{0001} & \psi_{0010} & \psi_{0011} \\ \psi_{0100} & \psi_{0101} & \psi_{0110} & \psi_{0111} \\ \psi_{1000} & \psi_{1001} & \psi_{1010} & \psi_{1011} \\ \psi_{1100} & \psi_{1101} & \psi_{1110} & \psi_{1111} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 & u^4 \\ v^1 & v^2 & v^3 & v^4 \\ w^1 & w^2 & w^3 & w^4 \\ z^1 & z^2 & z^3 & z^4 \end{pmatrix}. \quad (2.160)$$

A fenti $|\psi\rangle$ duális állapot kovariáns módon, a SLOCC csoport $(2, 2, 2, 2)$ ábrázolása szerint transzformálódik.

A fenti definíciókat felhasználva a másod és hatodrendű invariánsok alakja

$$I_1 \equiv \frac{1}{2}(U \cdot Z - V \cdot W), \quad I_3 \equiv \frac{1}{2}(u \cdot z - v \cdot w). \quad (2.161)$$

A \cdot szorzás segítségével a hatodrendű invariáns alakja

$$2I_3 = \text{Det} \begin{pmatrix} U \cdot U & U \cdot V & U \cdot Z \\ U \cdot W & V \cdot W & W \cdot Z \\ U \cdot Z & V \cdot Z & Z \cdot Z \end{pmatrix} - \text{Det} \begin{pmatrix} U \cdot V & V \cdot V & V \cdot W \\ U \cdot W & V \cdot W & W \cdot W \\ U \cdot Z & V \cdot Z & W \cdot Z \end{pmatrix}. \quad (2.162)$$

Megjegyezzük, hogy I_1 explicit alakjából nem látszik, hogy ez a polinom permutáció invariáns is. I_1 permutációinvariáns alakja

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\epsilon^{aa'} \epsilon^{bb'} \epsilon^{cc'} \epsilon^{dd'} \Psi_{abcd} \Psi_{a'b'c'd'} \right). \quad (2.163)$$

Továbbá, jöllehet I_3 alakilag I_1 -re hasonlít, I_3 azonban *nem* permutáció invariáns.

Nézzük a negyedrendű invariánsok szerkezetét. Két független ilyen invariánsunk van a leg-egyszerűbb a nyilvánvaló

$$I_4 \equiv \text{Det } \mathcal{L} \quad (2.164)$$

kombináció. A másik negyedrendű invariáns az alábbi hat Plücker mátrix²⁵ segítségével írható fel

$$\Pi_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \mathcal{L}_{iI} \mathcal{L}_{jJ} - \mathcal{L}_{iJ} \mathcal{L}_{jI}, \quad i, j, I, J = 0, 1, 2, 3. \quad (2.165)$$

A \mathcal{L}_{iI} 4×4 -es mátrix sorait indexelő i az U, V, W és Z vektorokon, a mátrix oszlopait indexelő I a megfelelő vektorok komponensein fut végig. Ezekkel a jelölésekkel az utolsó algebrailag független invariáns az

$$I_2 = \frac{1}{6} \Pi_{ijIJ} \Pi^{ijIJ} \quad (2.166)$$

alakba írható. A g bilineáris forma $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ bivektorok terén egy másik nemdegenerált szimmetrikus bilineáris formát indukál. A szeparálható bivektorok alterén ennek a formának az explicit alakja

$$(U \wedge V) \circ (W \wedge Z) \equiv 2((U \cdot W)(V \cdot Z) - (U \cdot Z)(V \cdot W)). \quad (2.167)$$

Ennek alapján I_2 alternatív alakja

$$I_2 = \frac{1}{6} \left[(U \wedge V) \circ (W \wedge Z) + (U \wedge W) \circ (V \wedge Z) - \frac{1}{2}(U \wedge Z)^2 - \frac{1}{2}(V \wedge W)^2 \right]. \quad (2.168)$$

Fontos megjegyeznünk, hogy az alábbi mennyiségek [LT03]

$$L \equiv I_4 = \text{Det } \mathcal{L}, \quad M \equiv \text{Det } \mathcal{M}, \quad N \equiv \text{Det } \mathcal{N} \quad (2.169)$$

²⁵Lásd a (2.105)-(2.106) képleteket.

mindegyike szintén negyedrendű invariánsokat ad. Azonban a fenti invariánsok nem függetlenek, hiszen

$$L + M + N = 0 \quad (2.170)$$

fenáll továbbá az

$$M - N = 3I_2 - 2I_1^2 \quad (2.171)$$

összefüggés is. A negyedrendű invariánsok közül választhatjuk például az $(I_2, I_4) = (I_2, L)$ vagy az (L, M) párt. Mi a továbbiakban az $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ invariáns polinomok algebrailag független generátorainak az (I_1, I_2, I_3, I_4) négyest választjuk.

A fenti generátorrendszer választását a későbbiekben ismertetett geometriai megfontolásokon kívül az alábbiak is indokolják. Tekintsük az

$$\Omega \equiv \mathcal{L}g\mathcal{L}^T g \quad (2.172)$$

4×4 -es mátrixot.²⁶ Ekkor Ω karakterisztikus polinomja

$$\Sigma_4(\Psi, t) \equiv \text{Det}(\mathbf{1}t - \Omega) = t^4 - 4I_1t^3 + 6I_2t^2 - 4I_3t + I_4. \quad (2.173)$$

A Newton identitások segítségével kapjuk, hogy

$$I_1 = \frac{1}{4} \text{Tr } \Omega, \quad I_2 = \frac{1}{12}[(\text{Tr } \Omega)^2 - \text{Tr } \Omega^2], \quad (2.174)$$

$$I_3 = \frac{1}{24}[(\text{Tr } \Omega)^3 - 3 \text{Tr } \Omega \text{Tr } \Omega^2 + 2 \text{Tr } \Omega^3], \quad (I_4)^2 = \text{Det } \Omega. \quad (2.175)$$

Az algebrailag független invariánsok fenti alakban történő generálása²⁷ az $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \simeq SO(4, \mathbb{C})$ izomorfia alapul.

A $\Sigma(\Psi, t)$ negyedfokú polinom diszkriminánsa a Ψ_{abcd} amplitudókkal kapcsolatos $2 \times 2 \times 2 \times 2$ „hiperkocka” $D_4(\Psi)$ hiperdeterminánsa. $D_4(\Psi)$ egy 2894276 monomiálisból álló [HSYY08] homogén 24-ed fokú polinom²⁸ mely az (I_1, I_2, I_3, I_4) generátorokkal az alábbi alakban fejezhető ki [3]

$$256D_4 = S^3 - 27T^2 \quad (2.176)$$

ahol

$$S = (I_4^2 - I_2^2) + 4(I_2^2 - I_1I_3), \quad T = (I_4^2 - I_2^2)(I_1^2 - I_2) + (I_3 - I_1I_2)^2. \quad (2.177)$$

2.6.2. Négy-qubit állapotok és az $SO(8)$ csoport. A négy-qubit állapotoknak és a rajtuk ható $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ transzformációk csoportjának létezik egy elegáns leírása mely az $SO(8, \mathbb{C})$ csoport speciális szerkezetén alapul. A 12 komplex dimenziós $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4} \simeq SO(4, \mathbb{C}) \times SO(4, \mathbb{C})$ csoport részcsoportja a 28 komplex dimenziós $SO(8, \mathbb{C})$ csoportnak és a megfelelő Lie algebrákra fennáll

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(8), \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(4) \quad (2.178)$$

Cartan felbontás ahol \mathfrak{m} az $\mathfrak{so}(8)$ Lie-algebra 16 dimenziós altere. A fenti felbontásra teljesül, hogy

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}. \quad (2.179)$$

Itt a kommutációs relációk azt fejezik ki, hogy a $G/H = SO(8)/SO(4) \times SO(4)$ faktortér egy szimmetrikus tér.

²⁶Figyeljük meg hogy a speciális $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ esetben $\Omega = \mathcal{L}\tilde{\mathcal{L}}$ ahol $\tilde{\mathcal{L}}$ a (2.66)-ban bevezetett Wootters-féle spin-flip operáció.

²⁷A fenti polinom mint a négy-qubit invariánsok generátorfüggvénye először a [3] dolgozatban jelent meg. A polinom és a négy-qubit SLOCC klasszifikáció kapcsolatáról lásd még a Chterental-Djokovic könyv megfelelő fejezetét [CD07b].

²⁸ $D_4(\Psi)$ -nek független négy-qubit invariánsokkal történő kifejezése először Luque és Thibon cikkében jelent meg [LT03].

A komplex számtest felett²⁹ $SO(8, \mathbb{C}) = SO(4, 4, \mathbb{C})$. Mivel az $SO(4, 4, \mathbb{C})$ csoport Lie-algebráját azok az R mátrixok alkotják melyekre teljesül

$$RE + ER^T = 0 \quad (2.180)$$

ahol

$$E = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \quad g = \varepsilon \otimes \varepsilon, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.181)$$

ezért egy tetszőleges $so(4, 4)$ Lie-algebra elemet az alábbi módon parametrizálhatunk

$$R(s_A, s_B, s_C, s_D; \mathcal{L}) = \begin{pmatrix} s_A \otimes I_B + I_A \otimes s_B & \mathcal{L}g \\ -\mathcal{L}^T g & s_C \otimes I_D + I_C \otimes s_D \end{pmatrix}. \quad (2.182)$$

Itt a 16 dimenziós \mathfrak{m} alteret a négy-qubit amplitudókkal felírt (2.151) \mathcal{L} mátrix reprezentálja. Az $s_A, s_B, s_C, s_D \in sl(2, \mathbb{C})$ 2×2 -es mátrixok a SLOCC infinitezimális generátoroknak felelnek meg. Például a (2.150)-ben szereplő \mathcal{A} mátrixra

$$\mathcal{A} = I_A + s_A + \dots, \quad s_A^T \varepsilon + \varepsilon s_A = 0 \quad (2.183)$$

ahol az utolsó egyenlet az $\mathcal{A}^T \varepsilon \mathcal{A} = \varepsilon$, $\mathcal{A} \in SL(2, \mathbb{C})$ egyenlet infinitezimális változata.

Könnyű megmutatni, hogy az infinitezimális SLOCC hatást a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ alakú kommutátorok generálják. Valóban a (2.182) mátrix blokk-diagonális részét kommutálva ugyanezen mátrix blokk-offdiagonális részével kapjuk, hogy

$$(s_A \otimes I_B + I_A \otimes s_B) \mathcal{L} + \mathcal{L}(s_C^T \otimes I_D + I_C \otimes s_D^T). \quad (2.184)$$

Ez pedig az

$$\mathcal{L} \mapsto (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \mathcal{L} (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})^T, \quad \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (2.185)$$

csoporthatás infinitezimális változata, melynek négy-qubit változata összhangban (2.150)-(2.151)-vel éppen a $\Psi_{abcd} \mapsto \mathcal{A}_a^{a'} \mathcal{B}_b^{b'} \mathcal{C}_c^{c'} \mathcal{D}_d^{d'} \Psi_{a'b'c'd'}$ transzformációs szabály.

2.6.3. Négy-qubit $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ SLOCC osztályok. Tekintsük most (2.151) és (2.182) alapján az alábbi 8×8 -as mátrixot

$$\mathcal{R} \equiv R(0, 0, 0, 0; \mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}g \\ -\mathcal{L}^T g & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.186)$$

Az előző alfejezet eredményei alapján tudjuk, hogy \mathcal{R} az $SO(4, 4, \mathbb{C}) = SO(8, \mathbb{C})$ csoport Lie-algebrájának egy eleme. Tudjuk továbbá azt is, hogy a $G \equiv SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ SLOCC részecsoport a fenti \mathcal{R} mátrixon az

$$\mathcal{R} \mapsto s \mathcal{R} s^{-1}, \quad s = \begin{pmatrix} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (2.187)$$

adjungált módon hat. Ennek alapján a négy-qubit G-SLOCC összefonódottsági osztályok klasszifikációja matematikai szempontból ekvivalens a (2.187) csoporthatás $so(4, 4)$ -en vett pályáinak klasszifikációjával.

A $|\Psi\rangle$ állapotot *féligeegyszerű*nek nevezünk ha a megfelelő \mathcal{R} mátrix $\mathcal{L}g$ blokkja a fenti csoporthatás eredményeképpen diagonalizálható. Az ilyen állapotok az alábbi módon is jellemezhetők. Tekintsük $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -ben a (2.73)-(2.74)-ben bevezetett *Bell bázist*. A Bell bázisvektorok segítségével definiáljuk a négy-qubit állapottér azon \mathfrak{a} alterét melyet az alábbi bázisvektorok feszítenek ki

$$|\phi_0\rangle = |\varphi_0\rangle \otimes |\varphi_0\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle) \quad (2.188)$$

²⁹ A (2.77) egyenlet alapján a g szignatúrája (2, 2) ezért a (2.180)-ben szereplő E mátrix szignatúrája (4, 4). Másrészt (2.155) alapján tudjuk, hogy a 2.4 fejezetben tárgyalt „mágikus bázis” felhasználásával a komplex számtest felett E -t a (4, 0) szignatúrájú 8×8 -as egységmátrixba transzformálhatjuk. A fenti transzformációk során az $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ csoport az $SO(4, \mathbb{C}) \times SO(4, \mathbb{C})$ csoportnak felel meg.

$$|\phi_1\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle = \frac{1}{2}(|0101\rangle - |0110\rangle - |1001\rangle + |1010\rangle) \quad (2.189)$$

$$|\phi_2\rangle = |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_2\rangle = \frac{1}{2}(|0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle) \quad (2.190)$$

$$|\phi_3\rangle = |\varphi_3\rangle \otimes |\varphi_3\rangle = \frac{1}{2}(|0000\rangle - |0011\rangle - |1100\rangle + |1111\rangle). \quad (2.191)$$

Definiáljuk most az alábbi négyparaméteres állapotokat

$$|G_{t_0 t_1 t_2 t_3}\rangle \equiv t_0|\phi_0\rangle + t_1|\phi_1\rangle + t_2|\phi_2\rangle + t_3|\phi_3\rangle \in \mathfrak{a}, \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}. \quad (2.192)$$

A generátorok a fenti állapotokon az alábbi értékeket veszik fel

$$I_1 = \frac{1}{4}[t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2], \quad (2.193)$$

$$I_2 = \frac{1}{6}[(t_0 t_1)^2 + (t_0 t_2)^2 + (t_0 t_3)^2 + (t_1 t_2)^2 + (t_1 t_3)^2 + (t_2 t_3)^2] \quad (2.194)$$

$$I_3 = \frac{1}{4}[(t_0 t_1 t_2)^2 + (t_0 t_1 t_3)^2 + (t_0 t_2 t_3)^2 + (t_1 t_2 t_3)^2], \quad I_4 = t_0 t_1 t_2 t_3. \quad (2.195)$$

A $(4I_1, 6I_2, 4I_3, I_4)$ invariánsok tehát az $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (t_0^2, t_1^2, t_2^2, t_3^2)$ változókban az elemi szimmetrikus polinomokat adják. A $|G_{t_0 t_1 t_2 t_3}\rangle$ állapotra a D_4 négy-qubit hiperdetermináns az alábbi alakot ölti

$$D_4 = \frac{1}{256} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2, \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t_0^2, t_1^2, t_2^2, t_3^2). \quad (2.196)$$

A fentiek alapján belátható, hogy a $G\mathfrak{a}$ alakú állapotok féligegyszerűek. Féligegyszerű állapotokra igaz az alábbi állítás [CD07b]: $|\Psi\rangle$ és $|\Phi\rangle$ G -ekvivalensek akkor és csak akkor ha az (I_1, I_2, I_3, I_4) invariánsaik megegyeznek. Vegyük azt is észre, hogy az \mathfrak{a} altérbe eső állapotokra a (2.186) mátrix az $so(8)$ egy Cartan részalgebráját adja. Az $(so(8), \mathfrak{a})$ pár Weyl csoportja 192 elemből áll. Megmutatható [CD07b], hogy ez a 192 elem előáll mint a (t_0, t_1, t_2, t_3) négyes 24 permutációja, kombinálva olyan $(\pm t_0, \pm t_1, \pm t_2, \pm t_3)$ előjelcserékkel ahol a negatív előjelek száma páros³⁰.

Legyen most

$$\mathfrak{a}' \equiv \{|\Psi\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\times 4} \mid |\Psi\rangle \in \mathfrak{a}, \quad t_i \neq \pm t_j, \quad i \neq j\}. \quad (2.197)$$

Fontos eredmény, hogy a D_4 hiperdetermináns az egyetlen³¹ olyan $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ invariáns polinom mely pontosan az \mathfrak{a}' osztályon vesz fel nemzérus értéket [GW12]. Tehát az \mathfrak{a}' osztályt az alábbi módon is jellemezhetjük

$$\mathfrak{a}' = \{|\Psi\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\times 4} \mid D_4(\Psi) \neq 0\}. \quad (2.198)$$

Három-qubit esetén a fenti osztálynak a

$$\{GHZ\} = \{|\Psi\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\times 3} \mid D_3(\Psi) \neq 0\} \quad (2.199)$$

GHZ osztály felel meg ahol most D_3 a (2.92) Cayley hiperdeterminánst jelöli. A fenti két osztály mindegyikére igaz, hogy az osztály elemeire az egy-qubit marginálisok teljesen kevert állapotok³². Az \mathfrak{a}' osztály másik érdekes tulajdonsága az, hogy az elemei nem tartalmaznak valódi három-részrendszeres összefonódottságot [VDDMV02]. Jegyezzük meg azonban, hogy a három-qubit esettel ellentétben a $|0000\rangle + |1111\rangle$ állapot *nem* tartozik az \mathfrak{a}' osztályba.

Tudjuk már, hogy a három-qubit GHZ állapotoknak megfelelő SLOCC osztály négy-qubit esetén az \mathfrak{a}' osztály. Egy négy-qubit állapot pontosan akkor esik ebbe az osztályba, ha a (2.177)

³⁰ $2^4 \cdot 4!/2 = 192$

³¹Modulo a D_4 hatványai és nemzérus komplex számszorosa.

³²Olyan 2×2 mátrixok melyre $\varrho = \frac{1}{2}I$.

segítségével számolt (2.176) hyperdetermináns *nem zérus*. Megmutatható, hogy a \mathfrak{a} osztálybeli állapotok sűrűn helyezkednek el a négy-qubit állapottérben³³. Hasonló állítás igaz a GHZ osztályba tartozó három-qubit állapotokra is. Három-qubit esetén azonban *véges sok* további degenerált ($D_3 = 0$) SLOCC összefonódottsági osztályt is kaptunk. Ezek a W-osztály, a három biseparálható osztály és a teljesen szeparálható osztály. Felmerül tehát a kérdés, hogyan lehet a $D_4 = 0$ -val jellemzett degenerált SLOCC osztályokat klasszifikálni?

Erre a kérdésre a válasz [CD07b, VDDMV02]: ezek az osztályok a (2.187) adjungált hatás azon pályái melyekre a pályát reprezentáló \mathcal{R} mátrix $\mathcal{R} = \mathcal{S} + \mathcal{N}$ alakba írható ahol \mathcal{S} féligegyszerű és $\mathcal{N} \neq 0$ nilpotens és $[\mathcal{S}, \mathcal{N}] = 0$. Ha $\mathcal{R} = \mathcal{N}$ nilpotens akkor a megfelelő négy-qubit állapotot is nilpotensnek hívunk. Ekkor a (2.172)-ban definiált Ω mátrix valamely hatványa eltűnik. Nilpotens állapotokra az (I_1, I_2, I_3, I_4) invariánsok mindegyike zérus. Ismeretes [CD07b], hogy a nilpotens állapotokra igaz, hogy amennyiben $|\Psi\rangle$ nilpotens akkor a nemzérus komplex számszorosa is az. Ebből következik, hogy egy nilpotens G -pálya egyúttal $GL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ azaz SLOCC pálya is.

A klasszifikáció eredményeképp a G -pályáinak 17 családját kapjuk. Az egyik családot a már ismert $G\mathfrak{a}$ alakú féligegyszerű állapotok adják. Ez a család kontinuum sok G inekvivalens pályát tartalmaz [GW10]. Valóban, amennyiben $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle \in \mathfrak{a}$ két (2.192) alakú állapot (t_0, t_1, t_2, t_3) illetve (s_0, s_1, s_2, s_3) paraméterekkel, akkor a nekik megfelelő két pálya inekvivalens hacsak $s_i = \pm t_{\sigma(i)}$ ahol $\sigma \in S_4$ és az előjelváltások száma páros³⁴.

A fennmaradó 16 család közül 10 család az $\mathcal{R} = \mathcal{S} + \mathcal{N}$ felbontásnak megfelelően komplex paramétereket (t_1, t_2, t_3) tartalmaz. Nevezetesen: 1 család 3, 4 család 2, 5 család pedig 1 komplex paramétert. Ebben a 10 esetben ha a komplex paramétereket zérussal tesszük egyenlővé nilpotens pályákat kapunk. A fennmaradó 6 család csak nilpotens pályákat tartalmaz. Az osztályok reprezentánsainak konkrét alakja könnyen megkonstruálható Djokovic és Chertental könyvfejezetének 1. táblázata alapján [CD07b].

2.6.4. G -SLOCC összefonódottsági osztályok modulo permutációk . Az előző alfejezetben említett 17 osztály esetén előfordulhat, hogy az egyik osztályba tartozó pálya a qubitek permutálásával egy másik osztályba tartozó pályába megy át. Szeretnénk megvizsgálni az előző alfejezetben kapott családokat abban az esetben amikor az állapot permutációs tulajdonságait is figyelembe vesszük.

Tekintsük az S_4 szimmetrikus csoportot mely a $\mathcal{H} \equiv (\mathbb{C}^2)^{\times 4}$ állapottéren a négy qubit permutációjaként hat. Legyen $G = SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$. Ekkor a $\tilde{G} \equiv S_4 \ltimes G$ csoport a

$$(\sigma, g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 \otimes g_4)(\tau, h_1 \otimes h_2 \otimes h_3 \otimes h_4) = (\sigma\tau, g_{\tau(1)}h_1 \otimes g_{\tau(2)}h_2 \otimes g_{\tau(3)}h_3 \otimes g_{\tau(4)}h_4) \quad (2.200)$$

szorzással természetes módon hat \mathcal{H} -n. A féligegyszerű pályák jellemzéséhez szükségünk lesz olyan G invariánsokra melyek egyúttal a qubitek permutációira nézve is invariánsak. Tudjuk már, hogy a (2.163) alakban is felírható I_1 egyúttal permutáció invariáns is. Ismeretes, hogy az algebrailag független \tilde{G} invariánsok száma is négy [LT03, GW12] . Ezeknek a definiálásához vezessük be a D és H négy-qubit invariánsokat az alábbi módon

$$D = I_3 - I_1 I_4, \quad H = 2I_1, \quad L = I_4. \quad (2.201)$$

Legyen $E = D + HL$ és $F = D - HM$. Ekkor (2.170) miatt $F = E + HN$. Ekkor megmutatható, hogy a

$$\Gamma = D + E + F = 3D + H(L - M) = 3F + H(M - N) = 3E + H(N - L) \quad (2.202)$$

³³A Zariski topológiára nézve.

³⁴Ez azt jelenti, hogy ha a két féligegyszerű állapot ugyanazon a G -pályán van akkor létezik olyan w eleme az $SO(8, \mathbb{C})$ Weyl csoportjának melyre $|\Phi\rangle = w|\Psi\rangle$.

hatodrendű invariáns permutációinvariáns tehát \tilde{G} invariáns. Megmutatható, hogy a

$$\Sigma = L^2 + M^2 + N^2, \quad \Pi = (L - M)(M - N)(N - L) \quad (2.203)$$

nyolcad és tizenkettedrendű mennyiségek is permutációinvariánsok s így \tilde{G} invariánsok. A fenti mennyiségeket Schlöffli vezette be 1852-ben [LT03, Sch52]. Tehát az algebrailag független \tilde{G} invariánsok: H, Γ, Σ, Π .

Féligegyszerű állapotokra igaz az alábbi állítás [CD07b]: $|\Psi\rangle$ és $|\Phi\rangle$ \tilde{G} -ekvivalensek akkor és csak akkor ha a két állapotra számolt (H, Γ, Σ, Π) invariánsok megegyeznek. Ha a két állapot legalább egy invariánsban különbözik akkor a két állapot \tilde{G} pályái különbözőek. Megmutatható, hogy a \tilde{G} csoporthatásra nézve a pályák már csak 9 családba szerveződnek. Tehát négy-qubit kilenc féleképpen fonható össze [VDDMV02]. A 9 család reprezentánsainak konkrét alakja megtalálható Djokovic és Chterental könyvfejezetének [CD07b] 7. táblázatában. Fontos megjegyeznünk, hogy a négy-qubit összefonódottsági osztályok [VDDMV02]-ben adott jellemzése nem precíz. A 9 összefonódottsági osztály precíz jellemzését lásd [CD07b]-ban, illetve a FLYQM módszereivel [BDD⁺10]-ban.

2.6.5. Négy-qubit állapotok és elliptikus görbék [10]. Az algebrailag független négy-qubit invariánsok és az elliptikus görbék közötti kapcsolat feltárásához fejezzük ki az algebrailag független (I_1, I_2, I_3, I_4) invariánsokat a szintén független H, L, M, D invariánsokkal

$$I_1 = \frac{1}{2}H, \quad I_2 = \frac{1}{6}(H^2 + 2L + 4M), \quad I_3 = D + \frac{1}{2}HL, \quad I_4 = L. \quad (2.204)$$

Ekkor az

$$U = H^2 + 4(M - L), \quad V = 12(HD - 2LM) \quad (2.205)$$

mennyiségekkel a már korábban bevezetett (2.177) S és T invariánsok alakja

$$12S = U^2 - 2V, \quad 216T = U^3 - 3UV + 216D^2. \quad (2.206)$$

Ekkor a D_4 négy-qubit hiperdetermináns (H, L, M, D) -vel kifejezett alternatív alakja a már ismert $256D_4 = S^3 - 27T^2$ összefüggés felhasználásával adódik.

Ismeretes, hogy egy $g = 1$ génuszú nemszinguláris projektív görbe, mely izomorf egy síkbeli köbös görbével, felírható az alábbi

$$x_0x_2^2 + a_1x_0x_1x_2 + a_3x_0^2x_2 - x_1^3 - a_2x_0x_1^2 - a_4x_0^2x_1 - a_6x_0^3 = 0 \quad (2.207)$$

Tate-alakban. Itt az a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 együtthatók egy tetszőleges karakterisztikájú algebrailag zárt \mathbb{F} számtest elemei³⁵. Az (x_0, x_1, x_2) pár az $\mathbb{F}P^2$ projektív sík homogén koordinátáit jelenti³⁶. Inhomogén $(x, y) \equiv (x_1/x_0, x_2/x_0)$ koordinátákat használva a fenti görbe az alábbi alakba írható

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6. \quad (2.208)$$

A görbe j invariánsát és a Δ diszkriminánsát az alábbi módon definiáljuk

$$j = \frac{c_4^3}{\Delta} = 1728 \frac{c_4^3}{c_4^3 - c_6^2} \quad (2.209)$$

ahol

$$c_4 = b_2^2 - 24b_4, \quad c_6 = -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6 \quad (2.210)$$

$$b_2 = a_1^2 + 4a_2, \quad b_4 = a_1a_3 + 2a_4, \quad b_6 = a_3^2 + 4a_6. \quad (2.211)$$

A görbe nemszinguláris akkor és csak akkor ha $\Delta \neq 0$.

³⁵Az együtthatók furcsa számozásának okait illetően lásd K. Ueno könyvének 3.3. fejezetét [Uen95].

³⁶Természetesen qubitek esetén $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Ekkor a görbe a komplex projektív síkban fekszik.

A (2.206)-(2.205) egyenletek alapján belátható, hogy a síkbeli köbös görbék $a_6 = 0$ -val jellemzett speciális osztálya elegáns módon jellemezhető a (H, L, M, D) négy-qubit invariánsokkal. Valóban, legyen

$$b_2 = U = H^2 + 4(M - L), \quad b_4 = \frac{1}{12}V = HD - 2LM, \quad b_6 = D^2 \quad (2.212)$$

s így

$$c_4 = 12S, \quad c_6 = -216T. \quad (2.213)$$

Ekkor,

$$a_1 = H = 2I_1, \quad a_2 = M - L, \quad a_3 = D = I_3 - I_1I_4, \quad a_4 = -LM. \quad (2.214)$$

Tehát a köbös görbék négy-qubit invariánsokkal parametrizált családja az

$$y^2 + Hxy + Dy = x^3 + (M - L)x^2 - LMx \quad (2.215)$$

elegáns alakba írható. Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti alakú görbe diszkriminánsa a négy-qubit állapot D_4 hiperdeterminánsával arányos

$$\Delta = S^3 - 27T^2 = \frac{1}{256}D_4 \quad (2.216)$$

a j invariáns pedig

$$j = 1728 \frac{S^3}{S^3 - 27T^2}. \quad (2.217)$$

Eredményünk tehát az alábbi. Minden négy-qubit állapothoz hozzárendelhetünk egy olyan Tate-alakban felírt elliptikus görbét melynek diszkriminánsa $D_4/2^4$ ahol D_4 a négy-qubit hiperdetermináns. Az elliptikus görbe pontosan akkor nem szinguláris ha $|\Psi\rangle$ a $|G_{t_0t_1t_2t_3}\rangle$, $t_0^2 \neq t_1^2 \neq t_2^2 \neq t_3^2$ kanonikus alakkal rendelkező (2.197) SLOCC osztályba tartozik.

Tekintsük azt a speciális esetet amikor a ϱ_{AB} és a ϱ_{CD} mátrixok nem maximális rangúak, de a többi marginális már maximális rangú. Ekkor $M \neq 0, L = 0$ tehát

$$y^2 + Hxy + Dy = x^3 + Mx^2. \quad (2.218)$$

Ha még a ϱ_{AC} és ϱ_{BD} mátrixok sem maximális rangúak³⁷ akkor $L = 0, M = 0$ és az elliptikus görbe alakja

$$y^2 + Hxy + Dy = x^3. \quad (2.219)$$

Ezekben a speciális esetekben a D_4 hiperdetermináns az

$$\Delta = D^2 (D(H^3 - 27D) + M((H^2 + 4M)^2 - 36HD)) \quad (2.220)$$

illetve a

$$\Delta = D^3 (H^3 - 27D) \quad (2.221)$$

alakot ölti.

Ha az \mathbb{F} test karakterisztikája nem egyenlő 2 vagy 3 akkor az elliptikus görbe Tate-féle alakjából projektív transzformációk segítségével³⁸ a Weierstrass-féle

$$y^2 = 4x^3 - Sx - T \quad (2.222)$$

kanonikus alakot kapjuk. Ez a már jólismert (2.173) negyedfokú polinomunk rezolvens harmadfokú polinomja. Mivel esetünkben $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ezért a Weierstrass alak a Tate alakból mindig megkapható. Azonban a Weierstrass-alakkal szemben a (2.215) Tate-alakban a legegyszerűbb (H, L, M, D) algebrailag független invariánsok jelennek meg.

³⁷Ekkor az $M + N + L = 0$ összefüggés miatt egyik marginális sem maximális rangú. Figyeljük meg azt is, hogy $L = 0$ esetén (2.204) miatt $I_3 = D$.

³⁸Alakítsuk teljes négyzetté (2.215) baloldalát, majd köbbé a jobb oldalát.

2.6.6. A négy-qubit invariánsok geometriája [3]. A (2.151) mátrix definiálása során Alice és Bob qubitjét kitüntetett szereppel ruháztuk fel. Ebben a képben minden négy-qubit állapotához hozzárendeltünk négy négyesvektort: az $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z})$ négyest. Ha a négy négyesvektor lineárisan független, akkor a négy vektor \mathbb{CP}^3 -ban négy különböző pontot határoz meg. Ebben az esetben a (2.164)-beli $L = I_4$ negyedrendű invariáns nem zérus és a (2.155)-ben szereplő marginálisok maximális rangúak.

A (2.165) formula segítségével hat bivektort definiáltunk ezek: $(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}, \mathbf{U} \wedge \mathbf{W}, \mathbf{U} \wedge \mathbf{Z}, \mathbf{V} \wedge \mathbf{W}, \mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}, \mathbf{W} \wedge \mathbf{Z})$. Ha a négyesvektorok lineárisan függetlenek akkor a fenti hat bivektor \mathbb{CP}^3 -ban hat komplex egyenest (\mathbb{CP}^1 -et) határoz meg. A hat projektív egyenest jellemző Plücker koordinátákkal a (2.166)-beli I_2 invariánst definiáltuk. Az egyenesek segítségével az I_4 invariáns alternatív jelentése: ha az $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$ és $\mathbf{W} \wedge \mathbf{Z}$ egyenesek nem metszik egymást³⁹ akkor $I_4 \neq 0$.

A (2.157)-(2.158) formulákkal négy trivektort definiáltunk ezek: $(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{W}, \mathbf{U} \wedge \mathbf{W} \wedge \mathbf{Z}, \mathbf{V} \wedge \mathbf{W} \wedge \mathbf{Z}, \mathbf{U} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{Z})$. A projektív geometriából ismeretes, hogy egy projektív sík (\mathbb{CP}^2) a \mathbb{CP}^3 projektív térben azon X^I homogén koordinátájú pontokból áll melyek egy $u_I X^I = 0$ alakú egyenletet elégítenek ki. Itt az u_I négyes a sík koordinátáit adja. Mivel u_I és λu_I ahol $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ ugyanazt a síkot határozzák meg ezért a \mathbb{CP}^3 -beli síkok egy másik komplex projektív teret határoznak meg. Ez a tér a *duális projektív tér* \mathbb{CP}_*^3 melynek pontjai az eredeti tér síkjai. Ha U^I, V^I, W^I három általános helyzetű pont homogén koordinátáit jelenti akkor a (2.157)-ben definiált u_I négyesvektorra $u_I U^I = u_I V^I = u_I W^I = 0$. Innen látható, hogy a (2.157)-(2.158)-beli négyesvektorokat négy projektív sík duális Plücker koordinátáinak is tekinthetjük. Ebben a képben az I_3 invariáns a négy-qubit állapot által definiált projektív síkokkal kapcsolatos invariáns. Vezessük be a P_{ijk} trivektort ahol $P_{012} = \mathbf{U} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$ stb. Itt például $P_{012IJK} = 3(U_I V_J W_K)$. Ekkor

$$I_3 = \frac{1}{144} P^{ijkIJK} P_{ijkIJK}. \quad (2.223)$$

Ez a képlet a (2.166) projektív egyenesekre érvényes formula projektív síkokra érvényes analógja.

A fenti fejtegetések alapján nyilvánvaló, hogy a (2.161)-ben szereplő I_1 kvadratikus invariáns a \mathbb{CP}^3 -ban fekvő *pontokkal*, a (2.166) negyedrendű invariáns *egyenesekkel*, a (2.223) hatodrendű invariáns *síkokkal*, végezetül a (2.164) invariáns a $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{W} \wedge \mathbf{Z}$ *térbeli* alakzatokkal kapcsolatos. Figyeljük meg, hogy féligegyszerű (2.197) négy-qubit állapotra a fenti alakzatok egy tetraéder pontjainak, egyenesének, és oldalainak illetve magának a tetraédernek felelnek meg⁴⁰. Az (I_1, I_2, I_3, I_4) négyes tehát azon túl, hogy algebrailag független generátorrendszert alkot, még fontos geometriai jelentéssel is rendelkezik. Ez a négy invariáns természetes módon jelenik meg a (2.173) fundamentális negyedfokú polinomban melynek rezolvens köbös polinomja a (2.222) Weierstrass alakban előálló elliptikus görbe jobb oldalán látható.

³⁹Hasonlóan, ha az $\mathbf{U} \wedge \mathbf{W}$ és $\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}$ vagy a $\mathbf{U} \wedge \mathbf{Z}$ és $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$ egyenesek nem metszik egymást akkor $I_4 \neq 0$.

⁴⁰Az $\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$ és $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$ egyenesek nyilván a \mathbf{V} pontban metszik egymást. Hasonló incidencia relációk láthatók be a többi egyenesre és a síkokra is.

2.7. N-qubit rendszerek

2.7.1. N-qubit rendszerek partíciói és a Grassmann sokaság [20]. Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy a két, három és négy-qubit rendszereknél megismert konstrukciók hogyan általánosíthatók tetszőleges számú qubitre. Az előző fejezetekben láttuk, hogy a qubitek permutációs szimmetriáját sértve, s így bizonyos qubiteknek speciális szerepet adva az LU és SLOCC invariánsok szerkezete a komplex projektív geometria módszereivel tárgyalható. Most is ezt az utat választjuk. Az N qubit rendszer *utolsó* $n < N$ qubitjét kitüntetettnek fogjuk tekinteni és az összefonódottsági mértékek szerkezetét az $(N - n, n)$ kétrészrendszeres particionálás geometriai vizsgálatán keresztül próbáljuk megérteni.

Tekintsünk tehát egy N -qubit tiszta állapotot

$$|\Psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N=0,1} \Psi_{i_1 i_2 \dots i_N} |i_1 i_2 \dots i_N\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2. \quad (2.224)$$

Válasszunk ki $n < N$ qubitet úgy, hogy ezeket az $i_1 i_2 \dots i_N$ sorozat *utolsó* n eleme címkézi. Tehát a címkézés az alábbi: $i_1 i_2 \dots i_{N-n} i_{N-n+1} \dots i_N$. Legyen $L \equiv 2^{N-n} \geq l \equiv 2^n$. Legyen továbbá $Z^{\alpha a}$, $\alpha = 0, 1, \dots, L-1$, $a = 0, 1, \dots, l-1$ az az $L \times l$ -es mátrix mely a $\Psi_{i_1 i_2 \dots i_N}$ amplitudóknak a fenti partíciónak megfelelő elrendezésével keletkezik. Ez azt jelenti, hogy a Z mátrix α indexének értékei decimális alakban a Ψ első $N-n$ indexének értékeinek felel meg bináris alakban, hasonlóan a Z mátrix a indexének decimális értékei a Ψ utolsó n indexének bináris sorozata felel meg. Mivel feltevésünk szerint $N - n \geq n$ ezért a $Z_{\alpha a}$ mátrix sorainak száma nagyobb egyenlő az oszlopok számánál.

Tegyük most fel, hogy a $Z^{\alpha 0}, Z^{\alpha 1}, \dots, Z^{\alpha l-1} \equiv \mathbf{Z}^0, \mathbf{Z}^1, \dots, \mathbf{Z}^{l-1}$ nemnormált oszlopvektorok mint \mathbb{C}^L elemei lineárisan függetlenek. Ekkor a $(Z^\dagger Z)^{ab}$ redukált sűrűségmátrix maximális rangú. A lineárisan független $\mathbf{Z}^0, \mathbf{Z}^1, \dots, \mathbf{Z}^{l-1}$ vektorok \mathbb{C}^L -ben egy l dimenziós síkot feszítenek ki. A \mathbb{C}^L -beli l -síkok halmaza egy $L-l \times l$ dimenziós komplex sokaságot alkot, a $Gr(L, l)$ Grassmann sokaságot. A $Z^{\alpha a}$ $L \times l$ -es mátrix elemei a Grassmann sokaság homogén (Stiefel) koordinátáit adják. Ezen koordináták száma nagyobb mint a sokaság komplex dimenziója. Ez a redundancia arra vezethető vissza, hogy a \mathbf{Z}^a , $a = 0, 1, \dots, l-1$ vektorok tetszőleges lineáris kombinációja ugyanazt az l -síkot feszíti ki. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a koordinátákként felhasznált Z mátrix $Z \mapsto ZS$ alakú transzformációi ahol $S \in GL(l, \mathbb{C})$ mértéktranszformációkat reprezentálnak. Ezek a transzformációk ugyanis csak a síkot kifeszítő vektorok újradefiniálását adják. Megmutatható [GK94, WW91], hogy a maximális rangú komplex $L \times l$ -es mátrixok halmaza⁴¹ a $Gr(L, l)$ Grassmann sokaság felett egy nyálábot alkot melynek mérték csoportja $GL(l, \mathbb{C})$. Figyeljük meg, hogy $n = 1$ qubit leválasztása esetén a mértékcsoport $GL(2, \mathbb{C})$ azaz éppen az $I \otimes \dots \otimes I \otimes S$ alakú SLOCC transzformációk csoportja.

A Grassmann sokaság jellemzésére használhatjuk az előző fejezetekben már megismert Plücker koordinátákat. Egy l -sík $P^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}$ Plücker koordinátái a Z mátrix azon maximális minorai melyeket úgy kapunk hogy a Z mátrix L sorából az $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$ -vel indexelt l darab sort tartjuk meg. A $Z \mapsto ZS$, $S \in GL(l, \mathbb{C})$ transzformáció során a Plücker koordináták $P^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} \mapsto \text{Det}(S) P^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}$ szabály alapján transzformálódnak. A Plücker koordináták száma $\binom{L}{l}$ mely nagyobb mint a $Gr(L, l)$ Grassmann sokaság dimenziója. Ez azt jelenti, hogy a Plücker koordináták nem függetlenek. Valóban a Plücker koordináták kielégítik [KPRT07] a

$$\Pi_{A,B}(P) = \sum_{j=0}^l (-1)^{j-1} P^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{l-2} \beta_j} P^{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{l-1} \hat{\beta}_j} = 0, \quad (2.225)$$

⁴¹Az $S(L, l)$ Stieffel sokaság.

Plücker relációkat. Itt $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-2}\}$ és $\mathcal{B} = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l\}$ a $\{0, 1, \dots, l-1\}$ halmaz $l-1$ és $l+1$ elemű részhalmazai, és a $\hat{\beta}_j$ elemet el kell hagyni. Például $L = 4$, $l = 2$ esetén mindössze egy független Plücker relációt kapunk a jólismert (2.106) relációt.

Mivel a Plücker koordináták csak egy nemzérus komplex számszorzó erejéig definiáltak ezért $Gr(L, l)$ -t be kell tudnunk ágyazni a $\mathbb{C}P^D$ -be ahol $D = \binom{L}{l} - 1$. A keresett beágyazás

$$Gr(L, l) \hookrightarrow \mathbb{C}P^{\binom{L}{l}-1} = \mathbf{P} \left(\bigwedge^l \mathbb{C}^L \right) \quad (2.226)$$

a Plücker beágyazás [GK94, WW91]. A Plücker beágyazás az l -síkot kifesztő \mathbf{Z}^a , $a = 0, \dots, l-1$ vektorokhoz a $\mathbf{Z}^0 \wedge \mathbf{Z}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{Z}^{l-1}$ l -vektort rendeli. A Plücker koordinátákra úgy is tekinthetünk mint egy olyan l -indexes teljesen antiszimmetrikus tenzorra mely még a Plücker relációkat is kielégíti. Az így kapott antiszimmetrikus tenzor szeparálható. Ezek a multilineáris formák elméletéből ismeretes objektumok, a molekula fizikában használatos Slater determinánsoknak felelnek meg. A fermionikus összefonódottságot tárgyaló következő fejezetben látni fogjuk, hogy a fermionikus tiszta állapotok szeparálhatóságára a Plücker relációk egy szükséges és elégséges kritériumot adnak. A szeparálható l -vektorok (Slater determinánsok) kielégítik a

$$\mathbf{Z}^0 \wedge \dots \wedge \mathbf{Z}^{l-1} \mapsto (\text{Det } S) \mathbf{Z}^0 \wedge \dots \wedge \mathbf{Z}^{l-1}, \quad (2.227)$$

transzformációs szabályt, ahol $S \in GL(l, \mathbb{C})$ ahol $Z \mapsto ZS$.

2.7.2. Összefonódottsági mértékek [20]. Legyen $\mathbf{Z}^a = Z^{\alpha a} e_\alpha$ ahol $\{e_\alpha\}_{\alpha=0}^{L-1}$ a kanonikus ortonormált bázis $V \equiv \mathbb{C}^L$ -ben. Vezessük most be a V^* -beli $\{e^\alpha\}_{\alpha=0}^{L-1}$ duális bázist. Ekkor $e^\alpha(\mathbf{Z}^a) = Z^{\alpha a}$. Legyen most $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{l-1}$ a $\{0, 1, \dots, L-1\}$ halmaz rögzített l -elemű részhalmaza növekvő sorrendbe rendezett elemekkel. Ekkor

$$\bigwedge_{a=0}^{l-1} e^{\alpha_a}(\mathbf{Z}^0, \dots, \mathbf{Z}^{l-1}) = \text{Det}(e^{\alpha_a}(\mathbf{Z}^b))_{a,b=0,\dots,l-1}. \quad (2.228)$$

a Z mátrix $\alpha_a, a = 0, \dots, l-1$ indexű maximális minorja, azaz a (2.227)-ben szereplő l -vektor $P^{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}$ Plücker koordinátája.

Tekintsük most az

$$\mathcal{E}_n \equiv l^2 \left(\sum_{\alpha_0 < \dots < \alpha_{l-1}=0}^{L-1} \left| \bigwedge_{a=0}^{l-1} e^{\alpha_a}(\mathbf{Z}) \right|^2 \right)^{2/l} \quad (2.229)$$

mennyiséget [Ema04]. \mathcal{E}_n Plücker koordinátákkal kifejezett alternatív alakja [20]

$$\mathcal{E}_n \equiv \frac{l^2}{l!} \left(\sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{l-1}=0}^{L-1} |P_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}}|^2 \right)^{2/l}. \quad (2.230)$$

Megmutatható [Ema04], hogy az \mathcal{E}_n mennyiségek lokális unitér (LU) invariánsok. Továbbá a fenti mennyiségek nyilvánvalóan általánosíthatók oly módon, hogy a kitüntetett szerepet játszó n -qubit helyét tetszőlegesnek választjuk. Ekkor, amennyiben (k_1, \dots, k_n) azonosítja az n -qubit helyét összesen $\binom{N}{n}$ LU-invariánst definiálhatunk. A keletkező $\mathcal{E}_n^{(k_1, \dots, k_n)}$ mennyiségekről az is megmutatható [Ema04], hogy ezek összefonódottság monotonok⁴². Az így bevezetett LU invariánsok természetesen nem feltétlenül függetlenek.

⁴²Ez a kifejezés azt jelenti, hogy a megfelelő mennyiségek nemcsak invariánsak lokális unitér transzformációkkal szemben, hanem a LOCC transzformációk (2.12)-vel kapcsolatos félcsoporthoz tartozó alkalmazása során átlagban csökkennek [BŽ06]. A (2.230) képletben megjelenő $2/l$ hatvány megjelenése garantálja az összefonódottsági monotonitást [Ema04].

Illusztratív példaként tekintsük ismét a három-qubittel kapcsolatos $L = 4$, $l = 2$ esetet. Ekkor a (2.230) definíciót használva $\mathcal{E}_1^{(1)}$ -re⁴³ a (2.148) összefüggések közül a baloldalt kapjuk, mely a (2.11) $\tau_{A(BC)}$ konkurrencia, az első qubit szeparálhatóságát jellemző mérték. Az $\frac{1}{3}(\mathcal{E}_1^{(1)} + \mathcal{E}_1^{(2)} + \mathcal{E}_1^{(3)})$ mérték mely a konkurrenciák átlaga [MW02], egy permutációinvariáns mérték.

A fenti konstrukciót az alábbi módon általánosíthatjuk SLOCC összefonódottság monotonok konstruálására [20]. Vezessünk be a $V \equiv \mathbb{C}^L$ komplex vektortéren egy $g : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ nemdegenerált bilineáris $SL(2, \mathbb{C})^{\times(N-n)}$ invariáns formát melynek mátrixa a kanonikus ortonormált bázisban az alábbi⁴⁴

$$g_{\alpha\beta} = \varepsilon_{i_0 j_0} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_{N-n-1} j_{N-n-1}}. \quad (2.231)$$

Itt ε a (2.66)-ben definiált $SL(2, \mathbb{C})$ invariáns tenzor. Ekkor $g(\mathbf{Z}, \mathbf{W}) \equiv \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} = g_{\alpha\beta} \mathbf{Z}^\alpha \mathbf{W}^\beta$. Vegyük észre, hogy páros $N - n$ esetén g szimmetrikus, páratlan $N - n$ esetén antiszimmetrikus. Tehát páratlan $N - n$ esetén a V egy szimplektikus formával ellátott vektortér.

Tekintsük most az

$$\mathcal{I}_n \equiv \frac{l^2}{l!} |P_{\alpha_0 \dots \alpha_{l-1}} P^{\alpha_0 \dots \alpha_{l-1}}|^{2/l} \quad (2.232)$$

mennyiségeket⁴⁵. \mathcal{I}_n -t az l lineárisan független vektor segítségével az alábbi alakba is írhatjuk

$$\mathcal{I}_n \equiv l^2 \left| \text{Det} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{Z}_0 & \cdots & \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{Z}_{l-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{l-1} \cdot \mathbf{Z}_0 & \cdots & \mathbf{Z}_{l-1} \cdot \mathbf{Z}_{l-1} \end{pmatrix} \right|^{2/l}. \quad (2.233)$$

Könnyen belátható, hogy a fenti mennyiségek SLOCC $SL(2, \mathbb{C})^{\times N}$ invariánsok. Valóban az $SL(2, \mathbb{C})^{\times(N-n)}$ invariancia a g bilineáris forma megfelelő invarianciájából következik. A (2.227) transzformációs formulából pedig a Plücker koordináták $SL(l, \mathbb{C})$ invarianciája adódik. Ez pedig maga után vonja az $SL(2, \mathbb{C})^{\otimes n} \subset SL(l, \mathbb{C})$ SLOCC részcsoporttal szembeni invarianciát. Az \mathcal{I}_n mennyiségek összefonódottság monotonok is [20].

A fenti SLOCC összefonódottság monotonok természetesen általánosíthatók tetszőleges n -qubit kiválasztása esetén is. Ekkor a fentiekben definiált $\mathcal{E}_n^{(k_1, \dots, k_n)}$ LU invariáns mértékekhez hasonlóan $\mathcal{I}_n^{(k_1, \dots, k_n)}$ SLOCC mértékek kaphatók. Három-qubit ($L = 4$, $l = 2$) esetén a $\mathbf{Z}^0 \equiv \xi$, $\mathbf{Z}^1 \equiv \eta$ szereposztással $\mathcal{I}_1^{(3)}$ éppen a (2.110) τ_{ABC} hármas összefonást adja. Mivel τ_{ABC} permutációs invariáns is ezért $\mathcal{I}_1^{(1)} = \mathcal{I}_1^{(2)} = \mathcal{I}_1^{(3)}$.

2.7.3. Példák N -qubit SLOCC invariánsokra [20]. Elsőként tekintsük azt a fontos esetet amikor csak egyetlen qubitet ruházunk fel speciális helyzettel. Ekkor az $(N - 1, 1)$ partíció geometriáját a $Gr(2^{N-1}, 2)$ Grassmann sokaság adja. Ebben az esetben két 2^{N-1} komponensű vektorunk van: \mathbf{Z}^0 és \mathbf{Z}^1 melyek a $\mathbf{Z}^0 \wedge \mathbf{Z}^1$ bivektorral jellemzett síkot feszítik ki. Így a fenti partíciónak megfelelő képpen az összefonódottság geometriáját a $(\mathbb{C}^2)^{\times(N-1)}$ -beli kétdimenziós síkok, vagy pedig a megfelelő projektív térbeli egyenesek írják le. Ha N páros akkor $N - 1$ páratlan, s így a (2.231) g mátrix antiszimmetrikus. Ekkor a (2.233) definícióban szereplő $\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{Z}^0$ és $\mathbf{Z}^1 \cdot \mathbf{Z}^1$ mennyiségek zérusok. Az \mathcal{I}_1 invariánsok alakja tehát

$$\mathcal{I}_1 = 4 |\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{Z}^1|^2. \quad (2.234)$$

A fenti formula két qubit esetén a (2.16) konkurrencia négyzetet adja, négy qubit esetén pedig a (2.163) és (2.201) képletekből ismert $4|H|^2$ kvadratikuss invariáns négyzetét. Ha N tetszőleges

⁴³A felső index arra utal, hogy most az *első qubit* játszik kitüntetett szerepet.

⁴⁴Az egyenlet baloldalán egy $L \times L = 2^{N-n} \times 2^{N-n}$ -es mátrix áll melynek sorait és oszlopait a decimális alakú $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, L-1$ számok indexelik. Az egyenlet jobb oldalán 2×2 -es mátrixok $N-n$ -szeres tenzorszorzata szerepel. Az $(i_0 i_1 \dots i_{N-n-1})$ szám bináris alakban az α számnak felel meg decimális alakban.

⁴⁵Itt a Plücker koordináták alsó indexes változatait a $g_{\alpha\beta}$ mátrix-szal történő indexelhúzással definiáltuk, és a szokásos összegkonvenció van érvényben.

páros szám az invariánsokat a (2.163)-szerű alakba írva láthatjuk, hogy a kapott mennyiségek egyúttal permutációs invariánsok is, ezért az $\mathcal{I}_1^{(k)}$ mennyiségek minden k -ra ugyanazt az invariánst adják.

Ha N páratlan akkor a g bilineáris forma szimmetrikus, ekkor

$$\mathcal{I}_1 = 4|(\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{Z}^0)(\mathbf{Z}^1 \cdot \mathbf{Z}^1) - (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{Z}^1)^2|. \quad (2.235)$$

Már tudjuk, hogy ez a negyedrendű invariáns három-qubit esetén a (2.110) hármas összefonást adja ami permutációs invariáns is. A fenti invariánsokat N -összefonásoknak nevezik [WC01].

Az $(N-2, 2)$ alakú partíciókra a legegyszerűbb példa az $N=4$ esetben kapható. Ekkor $L=l=4$ miatt \mathbb{C}^4 -ben 4 négyesvektort kapunk. Ezek a vektorok a már bevezetett (2.151) \mathcal{L} mátrix sorvektorait adják. A megfelelő Grassmann sokaság $Gr(4, 4)$ triviális, csak egyetlen Plücker koordinátánk van ami az \mathcal{L} mátrix determinánsát adja. A (2.233) képletből kapható invariáns ekkor összhangban (2.164)-vel $\mathcal{I}_2 \equiv \mathcal{I}_2^{(34)} = 16|L|^2$. Az összes $(2, 2)$ partíción alapuló invariáns

$$\mathcal{I}_2^{(12)} = \mathcal{I}_2^{(34)} = 16|L|^2, \quad \mathcal{I}_2^{(13)} = \mathcal{I}_2^{(24)} = 16|M|^2, \quad \mathcal{I}_2^{(14)} = \mathcal{I}_2^{(23)} = 16|N|^2. \quad (2.236)$$

Láthatóan ezek nem függetlenek, sőt teljesül még a (2.170) $L + M + N = 0$ összefüggés is. Megjegyezzük még, hogy mivel csak egyetlen Plücker koordinátánk van ezért a fenti invariánsok azonosak a (2.230)-beli $\mathcal{E}_2^{(k_1 k_2)}$ LU invariánsokkal⁴⁶ is.

Öt qubit esetén a $(4, 1)$ alakú partícióknak (2.235) szerkezetű negyedrendű invariánsok felelnek meg. Ezek a mennyiségek $\mathbb{C}P^{15}$ -beli egyeneseknek egy g bilineáris forma által definiált rögzített kvadratikus felületekhez⁴⁷ való viszonyát határozzák meg. Megmutatható [LT06], hogy a különböző kitüntetett qubiteken alapuló $\mathcal{I}_1^{(k)}$, $k=1, \dots, 5$ invariánsok algebrailag függetlenek.

Tekintsük most az $N=5$, $n=2$ felosztáson alapuló $(3, 2)$ partíciót. Ebben az esetben $Z^{\alpha\alpha}$ egy 8×4 -es mátrix. Mivel $N-n=3$ ezért g antiszimmetrikus s így $\mathbf{Z}^a \cdot \mathbf{Z}^b = -\mathbf{Z}^b \cdot \mathbf{Z}^a$, ezért

$$\mathcal{I}_2^{(45)} = 16|\text{Det}(\mathbf{Z}^a \cdot \mathbf{Z}^b)|^{1/2}. \quad (2.237)$$

Mivel egy páros dimenziós antiszimmetrikus mátrix mindig felírható négyzet alakban⁴⁸ ezért

$$\mathcal{I}_2^{(45)} = 16|(\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{Z}^1)(\mathbf{Z}^2 \cdot \mathbf{Z}^3) - (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{Z}^2)(\mathbf{Z}^1 \cdot \mathbf{Z}^3) + (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{Z}^3)(\mathbf{Z}^1 \cdot \mathbf{Z}^2)|. \quad (2.238)$$

A 10 lehetséges partíciónak megfelelő $\mathcal{I}_2^{k_1 k_2}$ invariánsok nem algebrailag függetlenek. Valóban, megmutatható [LT06], hogy a fenti mennyiségek nem függetlenek az $\mathcal{I}_1^{(k)}$ negyedrendű öt-qubit invariánsoktól. Az algebrailag független negyedrendű öt-qubit SLOCC invariánsok száma öt [LT06].

⁴⁶Vessük össze a (2.230) és a (2.232) definíciókat.

⁴⁷Egy rögzített partícióra egy ilyen felületet azon $X \in \mathbb{C}P^{15}$ homogén koordinátájú $\mathbb{C}P^{15}$ -beli pontok határozzák meg melyekre $g(X, X) = 0$.

⁴⁸Egy páros dimenziós antiszimmetrikus mátrix determinánsa az úgynevezett Pfaffian négyzeteként áll elő.

3. FEJEZET

Egyszerű fermionikus rendszerek geometriája

3.1. Két megkülönböztethetetlen részrendszerből álló rendszerek

3.1.1. Bevezetés . Az eddigi vizsgálódásaink során feltettük, hogy az összetett AB rendszert alkotó A és B részrendszerek megkülönböztethetők. Előfordulhat azonban az is, például egy kételektron rendszer esetén, hogy a részrendszerek ezzel a tulajdonsággal nem rendelkeznek. A kvantum információelméletben az összefonódottság egy kvantumos korrelációkon alapuló erőforrás amit különböző célokra szeretnénk felhasználni. Azonos részrendszerek esetén a megkülönböztethetetlenségből adódóan extra korrelációk lépnek fel (gondoljunk a kvantumkémiaiából ismeretes elektronkorrelációra). Kiderült azonban, hogy ezeket a korrelációkat nem lehet felhasználni kvantumos manipulációkra [GW02, GM04]. Ebből fakadóan fontos kérdés annak tisztázása, hogy hogyan lehet megkülönböztetni az összefonódottságot reprezentáló korrelációkat ezektől a részrendszerek azonosságából származó korrelációktól?

Ismeretes, hogy a kettőnél nagyobb térdimenzió esetén az azonosság elve a megkülönböztethetetlen rendszerek kvantálására két különböző lehetőséget enged meg. Ez az elv fermionokat és bozonokat tartalmazó rendszerek megjelenésére vezet.¹ A megkülönböztethető részrendszeres esetben az állapotot szeparálhatónak neveztük ha az AB rendszert jellemző tulajdonságok teljes rendszerét a részrendszerekhez is hozzárendelhetjük. Megkülönböztethetetlen részrendszerek esetén a megfelelő állapot szeparálható ha a tulajdonságok teljes rendszerét *legalább* az egyik részrendszerhez hozzárendelhetjük [GM04, GW02]. (A megkülönböztethetlenség miatt mindegy melyikhez.) Fermioniok esetén megmutatható, hogy ez a definíció matematikai szempontból ekvivalens azzal hogy a megfelelő állapotot egy antiszimmetrizált szorzat állapotként, egy Slater determinánsként írjuk fel. Hasonlóan bozonok esetén az állapotot szimmetrizált szorzatként állíthatjuk elő.

A dolgozatban kizárólag a FLYQM-ben fontos szerepet betöltő több fermionos összefonódottsággal fogunk foglalkozni. A bozonikus esetre egy a 4.2 fejezetben tárgyalt fontos speciális esettől eltekintve nem lesz szükségünk.

3.1.2. Két fermionos összefonódottság . Első lépésként ebben az alfejezetben a két fermionos összefonódottsággal foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy az egyrészecske állapotok tere páros dimenziós.

Legyen az egyrészecske állapotok tere $V = \mathbb{C}^{2K}$ ahol $K \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá $\{e_j\}_{j=1}^{2K}$ a standard ortonormált bázis V -n. Ekkor a tanulmányozandó fermionikus korrelációkat a $\mathcal{H} = \mathcal{A}(\mathbb{C}^{2K} \otimes \mathbb{C}^{2K})$ antiszimmetrizált tenzorszorzaton alapuló Hilbert térbeli állapotvektorok tulajdonságaiként reprezentálhatjuk.

Vezessük be az f_j^\dagger és $f_j, j = 1, \dots, 2K$ fermionikus keltő és eltüntető operátorokat, és a $|0\rangle$ fermionikus vákuum állapotot. A fermionikus operátorok a szokásos

$$\{f_j, f_k^\dagger\} = \delta_{jk}, \quad \{f_j, f_k\} = 0, \quad \{f_j^\dagger, f_k^\dagger\} = 0 \quad (3.1)$$

¹Egy és két dimenzióban lehetőség van még az úgynevezett tört statisztikájú részrendszerek bevezetésére. Az ilyen tulajdonságú részecskéket „bármionoknak”, angolul anyonoknak nevezik.

relációkat elégítik ki. Ekkor azt mondjuk, hogy az f_j^\dagger operátor egy olyan fermiont kelt mely az $e_j \in \mathbb{C}^{2K}$ -beli bázisvektornak megfelelő egyrészecske állapotban, vagy „módusban” van. A kétrészecske állapotok $K(2K-1)$ dimenziós Hilbert terét az $f_j^\dagger f_k^\dagger |0\rangle$, $j < k$ ortonormált bázisvektorok feszítik ki. Egy tetszőleges $|P\rangle$ kétfermion állapot² a

$$|P\rangle = \sum_{1 \leq j < k \leq 2K} P_{jk} f_j^\dagger f_k^\dagger |0\rangle \quad (3.2)$$

alakba írható. A fenti állapotot jellemezhetjük egy $2K \times 2K$ -s antiszimmetrikus mátrix segítségével ($P^T = -P$) ekkor normált állapotokra

$$2 \operatorname{Tr} P P^\dagger = 1. \quad (3.3)$$

Mivel a fermionok megkülönböztethetetlenek ezért a redukált sűrűségmátrixok megegyeznek

$$\varrho \equiv \varrho_A = \varrho_B = 2 P P^\dagger. \quad (3.4)$$

LU transzformációk során

$$|P\rangle \mapsto \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} |P\rangle, \quad P \mapsto \mathcal{U} P \mathcal{U}^T, \quad \mathcal{U} \in U(2K). \quad (3.5)$$

Fontos megfigyelni, hogy most a megkülönböztethetlenséget tiszteletben tartó lokális manipulációkat reprezentáló unitér transzformációk mindkét részrendszerre ugyanazok.

Két fermion esetén bevezethető a Schmidt dekompozícióval analóg úgynevezett Slater dekompozíció [SCKas⁺01]. Ennek során egy speciális $U \in U(2K)$ transzformáció segítségével elérhető, hogy a P mátrix a blokkdiagonális

$$Z = \operatorname{diag}(z_1 \varepsilon, z_2 \varepsilon, \dots, z_K \varepsilon), \quad Z = U P U^T, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

kanonikus alakot öltse ahol $z_I \in \mathbb{C}$. A nemzérus $z_I, I = 1, 2, \dots, K$ együtthatók száma a Slater rang. Ha a Slater rang egy akkor a megfelelő állapot szeparálható, különben összefonódott. A fenti alak helyett célszerű a Schmidt dekompozícióval nagyobb hasonlatosságot mutató Zumino [Zum62] által bevezetett, egy másik $V \in U(2K)$ -vel kapható, kanonikus alakot használni

$$R = \operatorname{diag}(r_1 \varepsilon, r_2 \varepsilon, \dots, r_K \varepsilon), \quad R = V P V^T \quad (3.7)$$

ahol $r_I \in \mathbb{R}_0^+$. Itt tehát akárcsak a Schmidt dekompozíció esetében az r_I -k nem negatív valós számok.

A kanonikus összefonódottsági mérték ismét a (2.9) von-Neumann entrópia. Kihasználva, hogy a (3.7) kanonikus alak miatt a (3.4) marginális λ_j sajátértékei kétszeresen elfajultak kapjuk, hogy

$$S(P) = \sum_{I=1}^K (2\lambda_I) - \sum_{I=1}^K (2\lambda_I) \log_2(2\lambda_I) = 1 - \sum_{I=1}^K (2\lambda_I) \log_2(2\lambda_I). \quad (3.8)$$

A von-Neumann entrópia az egyik részrendszerrel kapcsolatos ismereteink hiányát méri. Megkülönböztethetetlen részrendszerek esetén az ismereteink hiányosak azt illetően is, hogy melyik részrendszerhez is kell hozzárendelni a (3.4) $\varrho = \varrho_A = \varrho_B$ kevert állapotot. Ennek a következményeként a (3.8) egyenlőség baloldalán megjelenik az 1 konstans. Valóban a szeparálható (Slater rang = 1) állapotra $S = 1$ hiszen az egyetlen Slater determinánson alapuló állapot pontosan a részrendszerekről szerezhető információ fenti hiányosságát tükrözi. Megjegyezzük, hogy N darab, M egyrészecske állapottal rendelkező fermionikus részrendszer esetén [12] $\log_2 N \leq S \leq \log_2 M$. Ekkor tehát a megfelelő egydetermináns állapotokból adódó határozatlansággal kapcsolatos alsó korlát $\log_2 N$.

²Jelölésünk a már használt P Plücker koordinátákkal való kapcsolatra utal. Valóban, szeparálható állapotokra a P amplitúdók épp a megfelelő bivektorok kifeszítette sík Plücker koordinátái lesznek.

3.1.3. Két fermion négy egyrészecske állapottal [12]. Ebben az alfejezetben a leg-egyszerűbb $N = 2$, $M = 4$ esetet vizsgáljuk. Ekkor $\mathcal{H} \equiv \mathcal{A}(\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4)$ és

$$|P\rangle \equiv \sum_{j,k=1}^4 P_{jk} f_j^\dagger f_k^\dagger |0\rangle \in \mathcal{H}. \quad (3.9)$$

A P komplex 4×4 -es antiszimmetrikus mátrixot az alábbi alakba írjuk ³

$$P_{jk} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Már tudjuk, hogy a (3.5) alakú unitér transzformációk nem változtatják meg a (3.8) összefonódottsági entrópiát, ezért P -t felírhatjuk egy olyan unitér ekvivalens bázisban is ahol az összefonódottság geometriai tulajdonságai jobban látszanak. Legyen

$$U_{jk} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Az U által meghatározott bázisban írható, hogy

$$P' = U P U^T = \frac{1}{2} (\varepsilon \otimes \varepsilon) (I \otimes \mathbf{a}\sigma + \mathbf{b}\bar{\sigma} \otimes I) \quad (3.12)$$

ahol

$$\mathbf{a} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}, \quad \mathbf{b} \equiv \mathbf{E} - i\mathbf{B}, \quad \mathbf{a}\sigma \equiv a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \quad (3.13)$$

és felülhúzással a komplex konjugálást jelöltük. Ekkor a (3.4) redukált sűrűségmátrixot az alábbi alakba írhatjuk

$$\rho' = U \rho U^\dagger = \frac{1}{4} (\mathbf{1} + \Lambda), \quad (3.14)$$

ahol

$$\Lambda = 2 (I \otimes \mathbf{x}\bar{\sigma} + \mathbf{y}\sigma \otimes I + \mathbf{b}\sigma \otimes \bar{\mathbf{a}}\bar{\sigma} + \bar{\mathbf{b}}\sigma \otimes \mathbf{a}\bar{\sigma}), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{x} \equiv -i\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{y} \equiv i\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{1} \equiv I \otimes I. \quad (3.16)$$

Rövid számolás mutatja, hogy

$$\Lambda^2 = (1 - 64|\mathbf{E}\mathbf{B}|^2)(I \otimes I) = (1 - \eta^2)\mathbf{1}. \quad (3.17)$$

Ebből következik, hogy ρ két kétszeresen degenerált sajátértékét az alábbi alakba írhatjuk

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 - \eta^2} \right). \quad (3.18)$$

A (3.7) kanonikus alakban szereplő mennyiségek tehát

$$r_1 = \sqrt{\frac{\lambda_+}{2}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{\lambda_-}{2}}, \quad (3.19)$$

a (3.8) von-Neumann entrópia explicit alakja pedig

$$S_1(\eta) = 1 - x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x), \quad x \equiv \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \eta^2}). \quad (3.20)$$

Az

$$0 \leq \eta \equiv 8|P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23}| = 8|\mathbf{E}\mathbf{B}| \leq 1 \quad (3.21)$$

³Ezt az elektrodinamikából ismert

F_{ij} tenzor parametrizálására emlékeztető jelölést kényelmi okokból vezettük be.

mennyiség a (2.17) konkurrencia fermionikus analogonja [SCKas⁺01]. Mivel $\text{Det } P = (\mathbf{EB})^2$ azonnal látható, hogy η invariáns a (3.5) $U(4)$ lokális unitér csoportthatásra nézve. Figyeljük meg, hogy a $P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23}$ kombinációval már a (2.106) és (2.225) Plücker relációk kapcsán találkozottunk. Mint tudjuk a fenti kombináció eltűnése szükséges és elégséges feltétele annak, hogy találhassunk olyan u és v négyesvektorokat, melyekkel $P_{jk} = u_j v_k - u_k v_j$. Ekkor P egy szeparálható bivektor, tehát a megfelelő (3.9) kétfermion állapot egyetlen Slater determináns alakjába írható. A (3.7) kanonikus alakban így $r_1 = 1/2$ és $r_2 = 0$, azaz a Slater rang egy. Másrészt megmutatható [12], hogy $\eta = 1$ akkor és csak akkor ha

$$*P = e^{i\theta} \tilde{P}, \quad (3.22)$$

ahol \tilde{P} a (2.66)-ben definiált spin flip operáció, és

$$*P_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{jklm} P^{lm} \quad (3.23)$$

a P_{jk} mátrix Hodge-duáltja⁴. Ezeknek a kettő Slater rangú állapotoknak a fermionikus összefonódottsága maximális. Figyeljük meg, hogy a

$$|P\rangle \mapsto S \otimes S |P\rangle, \quad P \mapsto S P S^T, \quad S \in GL(4, \mathbb{C}) \quad (3.24)$$

SLOCC transzformációkra nézve η egy relatív invariáns azaz

$$\eta(|P\rangle) \mapsto |\text{Det } S| \eta(|P\rangle). \quad (3.25)$$

Nyilván csak kettő SLOCC osztályunk van. A SLOCC szeparálható osztály elemeire $\eta = 0$, a SLOCC összefonódott osztály elemeire pedig $\eta \neq 0$. Másrészt a finomabb klasszifikációt adó LU ekvivalencia fogalmát használva az $\eta \neq 0$ osztály kontinuum sok LU inekvivalens osztályt tartalmaz. Ezeket az osztályokat az $0 < \eta \leq 1$ értékekkel jellemezhetjük.

Ennek az alfejezetnek a lezárásaként hasonlítsuk össze két qubit és két négy egyrészecske állapottal rendelkező fermion SLOCC osztályainak geometriáját [12]. A 2.2.5 fejezetben láttuk, hogy egy tetszőleges két qubit állapotot megfeleltethetünk a három dimenziós komplex projektív tér, \mathbb{CP}^3 egy pontjának. A szeparálható állapotok a (2.57) által meghatározott \mathcal{Q} kvadratikus felületen, az összefonódott állapotok pedig ezen felületen kívül helyezkednek el. Tudjuk azt is, hogy $\mathcal{Q} \simeq \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \simeq S^2 \times S^2$, azaz a szeparálható állapotok tere direkt szorzat alakban áll elő. A direkt szorzatban szereplő két gömbfelület a két tiszta állapotban lévő qubitet reprezentáló Bloch gömbnek felel meg. A (2.147) egyenlet alapján azt is tudjuk, hogy alkalmas koordinátákban a \mathcal{Q} felület egyenletét a

$$(Z^0)^2 + (Z^1)^2 + (Z^2)^2 + (Z^3)^2 = 0 \quad (3.26)$$

alakban is felírhatjuk. A fenti egyenlet a két qubit konkurrencia alapjául szolgáló (2.60) kifejezés eltűnését fejezi ki.

Két, négy egyrészecske állapottal rendelkező fermion esetén a konkurrenciával analóg kifejezés az η relatív invariáns (3.21) kifejezése. Ez az invariáns a jólismert Plücker reláción alapul mely az állaptvektor 6 komplex amplitúdójában ismét egy kvadratikus kifejezés. A 2.5.4. fejezet alapján tudjuk, hogy a Plücker reláció ezúttal \mathbb{CP}^5 -ben a \mathcal{K} Klein felületet határozza meg. A szeparálható két-fermion állapotok tehát most a Klein felületen, míg az összefonódottak ezen kívül helyezkednek el. A szeparálható állapotok \mathcal{K} Klein felületét alkalmas koordinátákban most

$$(Z^0)^2 + (Z^1)^2 + (Z^2)^2 + (Z^3)^2 + (Z^4)^2 + (Z^5)^2 = 0 \quad (3.27)$$

alakba írhatjuk.

⁴Figyeljük meg, hogy $UgU^T = \varepsilon \otimes \varepsilon$ ahol $g = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ a Minkowski téridő metrikájához hasonló metrika illetve U a (3.11)-ben definiált unitér mátrix. Az indexek fel és lehúzása is ezzel a Minkowski-szerű metrikával történik.

A (3.26) által definiált \mathcal{Q} és a (3.27) által definiált \mathcal{K} felületek között érdekes matematikai különbség van. A differenciálgeometriából ismeretes, hogy a homogén másodfokú $\sum_{a=0}^n (Z^a)^2 = 0$ kifejezéssel adott $\mathbb{C}P^n$ -beli kvadratikus $Q_{n-1}(\mathbb{C})$ felületek szimmetrikus terek melyek az alábbi faktortér alakban reprezentálhatók

$$Q_{n-1}(\mathbb{C}) \simeq SO(n+1, \mathbb{C})/SO(2, \mathbb{C}) \times SO(n-1, \mathbb{C}). \quad (3.28)$$

$n = 3$ esetén (két qubit) mint tudjuk $Q_2(\mathbb{C})$ szorzat alakban is felírható. Nyilván ez a tulajdonság a (3.28) kifejezésében szereplő $SO(4, \mathbb{C})$ csoport "szorzat" szerkezetével kapcsolatos⁵. $n \geq 4$ esetén azonban a megfelelő szimmetrikus terek irreducibilisek [KK69], azaz már nem írhatók fel két sokaság direkt szorzataként. Tehát a fenti két speciális esetben a szeparálható állapotok tere megkülönböztethető illetve megkülönböztethetetlen részecskék esetén topológiai szempontból különböző. Érdemes azt is megfigyelni, hogy két szeparálható qubit esetén (szorzat alakú állapottér) a (2.23) von Neumann entrópia minimális értéke $S_{\min} = 0$, míg két szeparálható fermion esetén (szorzat alakban nem előállítható állapottér) a (3.20) von Neumann entrópia minimumára $S_{\min} = 1$ adódik. Tehát az utóbbi esetben a von Neumann entrópia zérustól különböző értéke és az állapottér szorzattól való eltérése a fermionok felcserélésével kapcsolatos kvantumos korrelációkat tükrözi. Ne keverjük azonban össze ezeket a korrelációkat a fermionikus összefonódottságot jellemző korrelációkkal. Ezeket a korrelációkat matematikailag olyan állapotvektorok reprezentálják melyeket (3.6) alapján több mint egy Slater determináns lineáris kombinációjaként írhatunk fel. Ezen állapotvektorok $Q_4(\mathbb{C})$ komplementumában foglalnak helyet és már kvantum információelméleti feladatok végrehajtására is használhatók.

3.2. Több megkülönböztethetetlen részrendszeres rendszerek

3.2.1. N -fermion rendszerek [SL14b]. Egy tetszőleges N -fermion rendszer (tisztá) állapotait (3.2)-hez hasonlatosan a

$$|P\rangle = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq 2K} P_{i_1 i_2 \dots i_p} f_{i_1}^\dagger f_{i_2}^\dagger \dots f_{i_p}^\dagger |0\rangle \quad (3.29)$$

kifejezéssel definiáljuk és a $|P\rangle$ vektor normáltságától eltekintünk⁶. További egyszerűsödést jelent ha a fizikában meghonosodott keltő és eltüntető operátorok bevezetésén alapuló jelölés helyett a multilineáris algebrából ismert lineáris formás jelölést használjuk.

Legyen $V = \mathbb{C}^N$ az egyrészecske állapotok Hilbert tere a szokásos skalárszorzattal ellátva. Legyen $\{e_j\}_{j=1}^N$ V egy bázisa. Tekintsük a V^* duális teret az $\{e^i\}_{i=1}^N$ duális bázissal ahol⁷ $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$. Legyen továbbá $\Lambda(V^*)$ a V^* külső algebrája. Ismeretes, hogy $\Lambda(V^*) = \bigoplus_{i=0}^N \wedge^i V^*$ ahol az $\binom{N}{p}$ dimenziós $\wedge^p V^*$ lineáris terek elemei p -formák. Tekintsünk egy tetszőleges $P \in \wedge^p V^*$ p -formát

$$P = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} P_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p}. \quad (3.30)$$

Ha a fenti kifejezésben megjelenő $\binom{N}{p}$ lineárisan független komplex kifejtési együtthatót egy minden indexében teljesen antiszimmetrikus p -indexű $P_{i_1 i_2 \dots i_p}$ tenzor részeként tekintjük akkor írható, hogy

$$P = \frac{1}{p!} P_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \quad (3.31)$$

⁵Gondoljunk a valós esetben érvényes $Spin(3) \simeq SU(2)$ és $Spin(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ izomorfizmusokra ahol $Spin(3)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$ és $Spin(4)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4)$. Ezek az összefüggések $S^2 \simeq SO(3)/SO(2)$ ismeretében azonnal Bloch gömbök két kópiáját adják.

⁶A továbbiakban célunk a SLOCC osztályok vizsgálata és a SLOCC transzformációk nem őrzik a normát.

⁷A lineáris formák és a vektorok közötti szokásos párosítást most a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jelöli. Nem keverendő ez össze az egyrészecske állapotok Hilbert terén definiált $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ skalárszorzattal.

ahol az ismétlődő indexekre összegzés értendő. Egy tetszőleges $v \in V$ vektorra definiáljuk az $\iota_v : \wedge^p V^* \rightarrow \wedge^{p-1} V^*$ lineáris leképezést az alábbi módon

$$\iota_v e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} = \sum_{n=1}^p (-1)^{n-1} \langle e^{i_n}, v \rangle e^{i_1} \wedge \cdots \wedge \check{e}^{i_n} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}. \quad (3.32)$$

Egy tetszőleges p -formára ez az

$$\iota_v P = \frac{1}{(p-1)!} v^{i_1} P_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}. \quad (3.33)$$

explicit kifejezést adja. Másrészt tetszőleges $\omega \in V^*$ esetén az ω -val történő ék-szorzás egy $\wedge : \wedge^p V^* \rightarrow \wedge^{p+1} V^*$ lineáris leképezést ad.

Tekintsük most a következő megfeleltetést

$$f_i^\dagger |P\rangle \mapsto e^i \wedge P, \quad f_i |P\rangle \mapsto \iota_{e_i} P. \quad (3.34)$$

Ekkor a (3.1) antikommutációs relációk teljesülnek⁸ és a (3.31) kifejezéssel definiált p -forma egy N egyrészecske állapottal rendelkező p -fermion állapot reprezentánsának tekinthető.

3.2.2. N -fermion rendszerek szeparálhatósága [18, SL14b]. Ebben az alfejezetben definiáljuk p -fermion állapotok SLOCC összefonódottsági osztályait és felidézünk a szeparálhatóság más kontextusban már megismert kritériumát.

Legyen $g = g^j_i e^i \otimes e_j \in GL(V) = GL(N, \mathbb{C})$ egy invertálható lineáris leképezés. Ez a leképezés egy $v \in V$ vektorhoz a $gv = g^j_i v^k \langle e^i, e_k \rangle \otimes e_j = g^j_k v^k e_j$ vektort rendeli hozzá. Írható, hogy

$$ge_i = e_j g^j_i, \quad g \in GL(V). \quad (3.35)$$

A fenti hatás a V^* duális téren a

$$\langle g^* e^i, ge_j \rangle = \langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j \quad (3.36)$$

formulával adott duális hatást indukálja

$$g^* e^i = e^j g'^j_i, \quad g'^j_k g^k_j = \delta^j_j \quad (3.37)$$

azaz a g' mátrix a g mátrix inverz transzponáltja. A duális hatás a p -formák $\wedge^k V^*$ -terén egy $\mathcal{D}(g^*)$ hatást definiál. Komponensekben kiírva ennek a hatásnak az alakja

$$P_{i_1 \dots i_k} \mapsto (\mathcal{D}(g^*)P)_{i_1 \dots i_k} = g'^{j_1}_{i_1} g'^{j_2}_{i_2} \cdots g'^{j_k}_{i_k} P_{j_1 \dots j_k}. \quad (3.38)$$

Nyilván az $S \equiv g'$ megfeleltetéssel a fenti SLOCC transzformációs szabály a (3.24) formula p -fermion rendszerekre történő általánosításának tekinthető.

Egy tetszőleges $P \in \wedge^p V^*$ p -fermion állapot $\{\mathcal{D}(g^*)P | g \in GL(V)\}$ pályáját az állapot SLOCC összefonódottsági osztályának nevezzük. A P állapot az illető osztály reprezentánsa. Feladatunk a fenti összefonódottsági osztályok jellemzése, szerkezetének tisztázása, és az osztályokat jellemző összefonódottság megfelelő mértékek segítségével történő kvantifikálása.

Legyen u_1, u_2, \dots, u_p p darab lineárisan független V^* egy-forma. Ekkor az $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p \in \wedge^p V^*$ p -forma $GL(V)$ pályáját alkotó állapotokat szeparálható állapotoknak nevezzük. Nyilván a fenti alakú p -formák az egyetlen Slater determináns alakjára hozható tiszta állapotoknak felelnek meg. A kétfermionos esetben az ilyen tulajdonságú állapotokat egy Slater rangú állapotoknak neveztük. Több fermionot tartalmazó rendszer esetén a Slater rang fogalma nem használható⁹.

⁸ Ha a V vektortér nincsen ellátva a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ skalárszorzáttal akkor az f_i^\dagger nyilván nem tekinthető az f_i adjungáltjának.

⁹ Az előző alfejezetekben megismert Slater dekompozíció a jólismert Schmidt dekompozíció általánosítása. Akárcsak a Schmidt dekompozíció több részecske rendszerekre ez sem általánosítható triviális módon.

A szeparálhatóság szükséges és elégséges feltétele a (2.225)-ben már megismert Plücker relációk teljesülése [GK94]. Ha $\mathcal{A} = \{i_1, i_2, \dots, i_{p-1}\}$ és $\mathcal{B} = \{j_1, j_2, \dots, j_{p+1}\}$ az $\{1, 2, \dots, N\}$ halmaz $p-1$ és $p+1$ elemű részhalmazai akkor a Plücker relációk az alábbi alakúak¹⁰

$$\Pi_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(P) = \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^{a-1} P_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} j_a} P_{j_1 j_2 \dots \hat{j}_a \dots j_{p+1}} = 0. \quad (3.39)$$

A releváns Plücker relációk felírásához elegendő növekvő sorozatokat tartalmazó \mathcal{A} és \mathcal{B} részhalmazokat venni, továbbá ha a \mathcal{B} halmaz tartalmazza az \mathcal{A} halmazt akkor a megfelelő Plücker reláció azonosan zérus tehát $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{B}$. Végezetül [KPRT07] ha $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ egyetlen $\{i\}$ pontból áll akkor $j > i$ választandó minden $j \in \mathcal{B} \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ esetén. A fenti megszorításokkal kapható kvadratikusan relációk száma [KPRT07]

$$\kappa = \frac{1}{4} a_0 + \sum_{m=1}^M a_m, \quad a_m = \frac{N!}{(m+1)!(m+3)!(p-m-2)!(N-p-m-2)!} \quad (3.40)$$

ahol $M = \min\{p, N-p\}-2$. Megmutatható, hogy a szeparabilitás eldöntéséhez felhasználandó Plücker relációk száma jelentősen tovább csökkenthető [KPRT07].

Az alfejezet lezárásaként emlékeztetünk arra, hogy a (2.226) kapcsán elmondottaknak megfelelően az $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p$ egydetermináns állapot által meghatározott $\mathbb{P}(\wedge^p \mathbb{C}^L)$ -beli¹¹ sugár a \mathbb{C}^N -beli u_1, u_2, \dots, u_p vektorok által kifeszített p -dimenziós altér Plücker beágyazás által létesített képe. A \mathbb{C}^N -beli p -dimenziós alterek a $Gr(p, N)$ Grassmann sokaságot alkotják. A Plücker beágyazás révén tehát $Gr(p, N)$ -re úgy is gondolhatunk¹² mint egy olyan $\mathbb{P}(\wedge^p \mathbb{C}^L)$ -beli algebrai varietásra melynek definiáló ideálját a (3.39) kvadratikusan kényszerek adják. A szeparálható p -fermion állapotok ezen varietását szokás még Grassmann-kúpnek is nevezni [KPRT07].

3.2.3. Beágyazott N -qubit rendszerek [18, VL09]. A FLYQM-vel kapcsolatos fejtegetéseink során hasznosnak bizonyul ha a qubitrendszereket fermionrendszerek részeként képzeljük el. Az utóbbi időben ezt a matematikai trükköt az összefonódottság elméletében is előszeretettel használják [LCV07, OCZ⁺11, CDGZ13, CDGZ14].

Tekintsünk egy tiszta állapotban lévő $2N$ egyrészecske állapottal rendelkező N -fermion rendszert. Reprezentáljuk a rendszer állapotát a (3.31) alakban felírt $P \in \wedge^N V^*$, $V = \mathbb{C}^{2N}$, N -formával. Indexeljük a V^* vektortér bázisvektorait az alábbi módon

$$\{e^1, e^2, \dots, e^N, e^{N+1}, e^{N+2}, \dots, e^{2N}\} \leftrightarrow \{e^1, e^2, \dots, e^N, e^{\bar{1}}, e^{\bar{2}}, \dots, e^{\bar{N}}\}. \quad (3.41)$$

A $\wedge^N \mathbb{C}^{2N}$ tér $\binom{2N}{N}$ bázisvektora közül 2^N olyan van mely nem tartalmaz $i_1 \bar{i}_1 \dots i_k \bar{i}_k$ indexkombinációjú blokkokat. Ezt a 2^N bázisvektort egy N -qubitből álló rendszer bázisvektoraiként képzeljük el

$$|00 \dots 0\rangle \leftrightarrow e^{12 \dots N}, \quad |00 \dots 1\rangle \leftrightarrow e^{12 \dots \bar{N}}, \quad \dots \quad |11 \dots 1\rangle \leftrightarrow e^{\bar{1} \bar{2} \dots \bar{N}}. \quad (3.42)$$

Legyen most

$$|\Psi\rangle = \sum_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N=0,1} \Psi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} |\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N\rangle \quad (3.43)$$

egy N -qubit állapot. Definiáljuk az

$$f : \mathbb{C}^{2N} \rightarrow \wedge^N \mathbb{C}^{2N} \quad (3.44)$$

¹⁰ A kifejezésben szereplő \hat{j}_a elemet el kell hagyni.

¹¹ $L = \binom{N}{p}$.

¹² A Plücker beágyazás a megfelelő projektív térbe történik, ezért helyesebb lenne $Gr(p, N)$ helyett a CP^{N-1} -beli projektív $p-1$ dimenziós alterek sokaságáról beszélni.

leképezést az alábbi módon

$$|\Psi\rangle \mapsto P_\Psi \equiv \Psi_{00\dots 0}e^{12\dots N} + \Psi_{00\dots 1}e^{12\dots \bar{N}} + \dots + \Psi_{11\dots 0}e^{\bar{1}2\dots N} + \Psi_{11\dots 1}e^{\bar{1}2\dots \bar{N}}. \quad (3.45)$$

A P_Ψ alkú N -formák $\wedge^N V^*$ egy \mathcal{W} alterének elemei.

A (3.45) beágyazás miatt az N -qubit SLOCC csoportot is beágyazhatjuk a (3.38) módon ható N -fermionikus SLOCC csoportba. Valóban, az N -qubit SLOCC csoportthatás alakja

$$\Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_N} \mapsto \mathcal{A}^{(1)}_{\mu_1}{}^{\nu_1} \mathcal{A}^{(2)}_{\mu_2}{}^{\nu_2} \dots \mathcal{A}^{(N)}_{\mu_N}{}^{\nu_N} \Psi_{\nu_1\nu_2\dots\nu_N} \quad (3.46)$$

ahol $\mathcal{A}^{(n)} \in GL(2, \mathbb{C})$, $n = 1, 2, \dots, N$. Legyen most a (3.38) transzformációs szabályban szereplő $g_i^j \in GL(2N, \mathbb{C})$ fermionikus SLOCC mátrix alakja

$$\begin{pmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{pmatrix} \in GL(2N, \mathbb{C}) \quad (3.47)$$

ahol $A_d = \text{diag}(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_N)$, $B_d = \text{diag}(\beta_1\beta_2\dots\beta_N)$, $C_d = \text{diag}(\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_N)$ és $D_d = \text{diag}(\delta_1\delta_2\dots\delta_N)$ diagonális $N \times N$ -es mátrixok. Ekkor az

$$\mathcal{A}^{(n)} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

mátrixok a szokásos (3.46) N -qubit SLOCC transzformációkat eredményezik.

A 2.6.4 alfejezetben megemlítettük, hogy általában a SLOCC klasszifikáció során a $G = GL(2, \mathbb{C})^{\times N}$ SLOCC csoport hatás pályáinak különböző családait kapjuk. A családok G inekvivalens pályákat tartalmaznak. Előfordulhat az, hogy az egyik családba tartozó pálya a qubitek permutálása során egy másik családba tartozó pályába megy át. Ezért célszerű egy olyan általánosított SLOCC klasszifikációt vizsgálni ahol összefonódottsági osztályok alatt a $\tilde{G} \equiv S_N \ltimes G$ csoport pályáit értjük ahol S_N a szimmetrikus csoport és a csoportthatás konkrét alakját illetően lásd a (2.200) formulát. Ezek alapján célszerű a qubiteken ható szimmetrikus csoportot is beágyazni a fermionikus SLOCC csoportba. Az S_N csoport az $\{1, 2, \dots, N\}$ halmaz elemeit permutálja, ezért S_N -t mint S_{2N} azon részcsoporthát is elképzelhetjük melynek egy $\sigma \in S_N$ eleme az $\{1, 2, \dots, \bar{N}\}$ halmazon az

$$\{1, 2, \dots, N, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{N}\} \mapsto \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N), \sigma(\bar{1}), \sigma(\bar{2}), \dots, \sigma(\bar{N})\} \quad (3.49)$$

módon hat.

Azonban többet is megmutathatunk. Kiindulhatunk a $\wedge^N V^*$ téren ható fermionikus SLOCC csoport egy tetszőleges részcsoporthából és megvizsgálhatjuk, hogy melyek azok a potenciális részcsoporthok amelyek őrzik a beágyazott N -qubit állapotokat reprezentáló (3.45) \mathcal{W} alteret. A részletes analízis azt mutatja [Oed09], hogy a \tilde{G} csoport a legbővebb olyan részcsoporthja $GL(2N, \mathbb{C})$ -nek mely őrzí \mathcal{W} -t.

Illusztráljuk a fenti eredményeket a legegyszerűbb nemtriviális esetben. Legyen $N = 2$ azaz $V = \mathbb{C}^4$, és $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, \bar{1}, \bar{2}\}$. Ekkor két qubitet ágyazhatunk be egy olyan kétfermionos rendszerbe mely négy egyrészecske állapottal rendelkezik. Írjuk a (3.9) állapotot a multilineáris formás

$$P = P_{12}e^{12} + P_{\bar{1}\bar{2}}e^{\bar{1}\bar{2}} + P_{1\bar{2}}e^{1\bar{2}} + P_{\bar{1}2}e^{\bar{1}2} + P_{1\bar{1}}e^{1\bar{1}} + P_{2\bar{2}}e^{2\bar{2}} \quad (3.50)$$

alakba ahol például $e^{\bar{1}2} = e^{\bar{1}} \wedge e^2 = e^3 \wedge e^2 = -e^2 \wedge e^3$, és $P_{\bar{1}2} = P_{32} = -P_{23}$. A $\wedge^2 \mathbb{C}^4$ -be beágyazott két qubit állapot alakja

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j=0,1} \Psi_{ij}|ij\rangle \mapsto P_\Psi = \Psi_{00}e^{12} + \Psi_{01}e^{1\bar{2}} + \Psi_{10}e^{\bar{1}2} + \Psi_{11}e^{\bar{1}\bar{2}}. \quad (3.51)$$

Vegyük észre, hogy a P_Ψ beágyazott állapotnak az alábbi fontos fizikai interpretáció adható. Írjuk az egyrészecske állapotok Hilbert terét reprezentáló \mathbb{C}^4 -et a $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \simeq \mathcal{H}_{site} \otimes \mathcal{H}_{spin}$ alakba.

Ebben a képen gondolhatunk arra, hogy a két fermion két különböző helyre lokalizálható (gondoljunk például egy kétfenekű potenciálgödör bal és jobb oldali részére) ugyanakkor két különböző spinbeállással is rendelkezhet. Ebben a képen például az $e^{1\bar{2}}$ bázisvektor annak a lehetőségnek felel meg amikor az 1-es helyen lévő fermion spinvetülete "fel" állásban, míg a 2-es helyen lévőé "le" állásban van. Ennek a lehetőségnek a komplex amplitúdója Ψ_{01} . Fontos felfigyelnünk arra is, hogy a fenti kétqubites értelmezés csak az *egyszeresen betöltött állapotoknak* adható. A *kétszeresen betöltött állapotokra* utaló, az $e^{1\bar{1}}$ és $e^{2\bar{2}}$ bázisvektorokkal képviselt, lehetőségeket nem engedjük meg. Könnyű belátni, hogy a (3.47) alakú 4×4 -es mátrixokkal reprezentált SLOCC transzformációk a (3.51) állapotokon a (2.24) alakú transzformációs szabályt adják. Rögtön látható az is, hogy (normálási faktoroktól eltekintve) az általános P kétfermion állapotra definiált (3.21) összefonódottsági mérték a P_Ψ állapotokon a két qubit konkurrencia (2.17) kifejezésére vezet.

3.2.4. Fermionikus beágyazott rendszerek . Előfordulhat, hogy az egyrészesecske állapotok $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2N}$ Hilbert terén a szokásos skalársorzaton kívül még egyéb extra struktúra is adott. Legyen például $V = \mathcal{H}$ és V -n adott egy

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad (3.52)$$

nemdegenerált, alternáló bilineáris (szimplektikus) forma az alábbi módon. Válasszuk az előző alfejezetből ismert $\{e_1, \dots, e_N, e_{\bar{1}}, \dots, e_{\bar{N}}\}$ bázist. Ekkor a ω -t az

$$\omega(e_i, e_{\bar{i}}) = -\omega(e_{\bar{i}}, e_i) = 1, \quad \omega(e_i, e_j) = 0, \quad j \neq \bar{i} \quad (3.53)$$

összefüggések definiálják. Nyilván ω az

$$\omega = e^1 \wedge e^{\bar{1}} + e^2 \wedge e^{\bar{2}} + \dots + e^N \wedge e^{\bar{N}} \quad (3.54)$$

explicit alakba is írható. Ekkor az $Sp(2N, \mathbb{C}) \subset GL(2N, \mathbb{C})$ csoport V azon automorfizmusainak csoportja melyekre

$$\omega(gv, gu) = \omega(v, u), \quad u, v \in V, \quad g \in GL(2N, \mathbb{C}). \quad (3.55)$$

Ekkor az $Sp(2N, \mathbb{C})$ transzformációkat úgy tekinthetjük mint azokat a SLOCC transzformációkat melyek a szimplektikus struktúrát változatlanul hagyják. A kvantum információelmélet szempontjából tehát két fizikai állapotot ekvivalensnek tekinthetünk ha őket kölcsönösen egymásba alakíthatjuk olyan fizikai manipulációkkal melyek matematikai reprezentánsai tiszteletben tartják az egyrészesecske állapotok terének extra szerkezetét. Matematikai szempontból ezeknek a speciális összefonódottsági osztályoknak a megtalálása az $Sp(2N, \mathbb{C})$ pályák osztályozásával egyenértékű. A $\wedge^N V^*$ N -fermion állapotok terén azonban az $Sp(2N, \mathbb{C})$ csoport reducibilis módon hat. Ismeretes [FH91], hogy az

$$\omega \wedge P = 0 \quad (3.56)$$

egyenletnek eleget tevő *primitív* formák már egy irreducibilis alteret alkotnak¹³. Értelmes feladat tehát a primitív formákkal reprezentált N -fermion állapotok SLOCC összefonódottsági osztályainak vizsgálata.

A későbbiek során számunkra csupán az $N = 3$ -as eset lesz érdekes. Ekkor $\wedge^3 \mathbb{C}^6$ dimenziója $\binom{6}{3} = 20$. Az $Sp(6, \mathbb{C})$ -re leszűkített SLOCC hatás már nem irreducibilis. A (3.56) feltételnek eleget tevő invariáns alteret a

$$(e^{1\bar{1}} + e^{2\bar{2}} + e^{3\bar{3}}) \wedge (P_{1\bar{1}2} e^{1\bar{1}2} + P_{1\bar{1}3} e^{1\bar{1}3} + \dots + P_{3\bar{3}2} e^{3\bar{3}2}) = 0 \quad (3.57)$$

¹³Fulton és Harris monográfiájának [FH91] 260. oldalán az irreducibilitás feltételét mint az ω -val kontrahált N -vektorok kifejezésének eltűnését adják meg. Tekintettel arra, hogy a későbbiekben tisztázódó okokból a fermionikus állapotainkat N -formákkal és nem N -vektorokkal reprezentáltuk a megfelelő feltételt esetünkben (3.56) adja.

feltétel vizsgálatával könnyen megtalálhatjuk ¹⁴. A háromfermion állapotokat jellemző 20 amplitúdó kompakt jellemzésére vezessük be az alábbi jelöléseket

$$\eta \equiv P_{123}, \quad \xi \equiv P_{\overline{123}} \quad (3.58)$$

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} P_{\overline{123}} & P_{\overline{131}} & P_{\overline{112}} \\ P_{\overline{223}} & P_{\overline{231}} & P_{\overline{212}} \\ P_{\overline{323}} & P_{\overline{331}} & P_{\overline{312}} \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} P_{\overline{123}} & P_{\overline{131}} & P_{\overline{112}} \\ P_{\overline{223}} & P_{\overline{231}} & P_{\overline{212}} \\ P_{\overline{323}} & P_{\overline{331}} & P_{\overline{312}} \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Ekkor a (3.57) feltétel eredményeképpen kapjuk, hogy az X és Y mátrixok szimmetrikusak azaz

$$X^t = X, \quad Y^t = Y. \quad (3.61)$$

Tehát a primitív háromformákkal reprezentált háromfermionállapotok invariáns altere $1 + 6 + 6 + 1 = 14$ dimenziós. Figyeljük meg azt is, hogy az η , ξ mennyiségek és az X , Y mátrixok diagonális elemei éppen a beágyazott háromqubit rendszerek amplitúdóit adják. Ezekre mint tudjuk egyszeresen betöltött állapotokra is gondolhatunk. Tehát a (3.61) kényszerek csak a többszörösen betöltött állapotok amplitúdóira adnak megszorítást.

Érdemes még megjegyezni, hogy ha a primitív háromformák terét $\wedge^3 V^*$ -val jelöljük ($V = \mathbb{C}^6$) akkor igaz a

$$\wedge^3 V^* = \wedge_0^3 V^* \oplus \omega \wedge V^* \quad (3.62)$$

dekompozíció. A primitív formák itt megjelenő komplementuma az $Sp(6, \mathbb{C})$ hatás hat dimenziós invariáns alterét adja. Ez az alter könnyen láthatóan a (3.59) és (3.60) mátrixok antiszimmetrikus részével kapcsolatos.

3.3. Háromfermion rendszerek

3.3.1. Három formák a fizikában . Hat, hét és nyolc egyrészecske állapottal rendelkező háromfermion rendszereket először a múlt század hetvenes éveinek elején a kvantumkémikusok vizsgáltak [BD72]. Ezen modellrendszerek segítségével a fermionikus tiszta állapotokból kapható egyrészecskes marginálisok sajátértékei között fontos egyenlőtlenségek fennállását figyelték meg. A hat egyrészecske állapotos esetben sikerült azt is megmutatni [BD72, Rus07], hogy ezen egyenlőtlenségek fennállása szükséges és elégséges feltételt ad arra nézve, hogy egy egyrészecskes marginálist egy háromfermionos tiszta állapottal reprezentálhassunk. Az ezt követő három évtized során a fenti híres N -reprezentálhatósági probléma terén lényeges áttörés nem történt. A tiszta állapotokra vonatkozó fermionikus N -reprezentálhatósági problémát nemrégiben Klyachko oldotta meg [AK08, Kly06]. Kiderült, hogy az egyrészecskes marginálisok spektrumára vonatkozó kényszerek egy konvex politópot definiálnak. Jelenleg ezeknek az úgynevezett összefonódottsági politópoknak a szerkezete intenzív kutatási terület [SGC13, WDC13, BRGBS13].

A kvantumösszefonódottság kontextusában hat egyrészecske állapottal rendelkező háromfermion rendszereket, a matematikus S. Krutchevich [Kru07] Jordan algebrákkal kapcsolatos munkásságát felhasználva, először ezen dolgozat szerzője vizsgált Msc hallgatójával [18]. Kiderült, hogy ezekre a rendszerekre a SLOCC osztályok száma (a triviális osztályt nem számolva) négy. Az osztályok szerkezete a három-qubit SLOCC osztályok szerkezetével strukturális hasonlatosságot mutat. Természetesen a különböző dimenziós egyrészecske állapotokkal rendelkező

¹⁴A második zárójeles kifejezésben nem adnak járulékot a $\{P_{123}, P_{\overline{123}}, \dots, P_{\overline{123}}\}$, hanem csak a $P_{i\bar{i}j}$ típusú amplitúdók.

háromfermion rendszerek SLOCC klasszifikációjának problémája mint a három formák klasszifikációjának problémája 6,7,8 és 9 dimenzióban a matematikai irodalomban már régóta jólismert [Rei07, Sch31, Gur35, Gur48, Gur64, BG78]^{15,16}.

Amennyiben a 6,7 és 8 *komplex* dimenziós vektorterekkel kapcsolatos három formák helyett 6,7 és 8 dimenziós *valós* sokaságokon értelmezett differenciál három formákat tekintünk megmutatható, hogy a sokaságok geometriájának vizsgálatában bizonyos polinom invariánsokon alapuló funkcionálok alapvető fontosságú szerepet játszanak [Hit00, Hit01, Hit03]. Bizonyítható [RSAC05], hogy ezek a funkcionálok az úgynevezett topologikus hűrelmélettel kapcsolatos hatásfunkcionálokkal [Wit88a, OSV04] hozhatók kapcsolatba. A FLYQM diszkussziója során tisztázzuk ezeknek a funkcionáloknak és a speciális összefonódott rendszereket jellemző összefonódottsági mértékeknek a kapcsolatát [15]. Ehhez szükségünk lesz a hat és hét egyrészecske állapottal rendelkező háromfermion rendszerek geometriájának alapos ismeretére.

3.3.2. Három fermion hat egyrészecske állapottal. A negyedrendű invariáns [18, SL14b]. Legyen az egyrészecske állapotok Hilbert tere $V = \mathbb{C}^6$ és írjuk a háromfermionos állapotunkat a

$$P = \frac{1}{3!} P_{i_1 i_2 i_3} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge e^{i_3} \in \wedge^3 V^* \quad (3.63)$$

alakba. Ekkor (3.37) és (3.38) alapján a SLOCC transzformációk csoportja az alábbi módon hat

$$P_{i_1 i_2 i_3} \mapsto g'_{i_1}{}^{j_1} g'_{i_2}{}^{j_2} g'_{i_3}{}^{j_3} P_{j_1 j_2 j_3}, \quad g' \in GL(6, \mathbb{C}). \quad (3.64)$$

Tekintsük az alábbi 6×6 -os mátrixot¹⁷

$$(K_P)^a{}_b = \frac{1}{2!3!} \varepsilon^{a i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} P_{b i_1 i_2} P_{i_3 i_4 i_5}. \quad (3.65)$$

SLOCC transzformációk során K_P az alábbi módon transzformálódik

$$(K_P)^a{}_b \mapsto \text{Det}(g') g'^a{}_c g'^d{}_b (K_P)^c{}_d. \quad (3.66)$$

Mivel (3.37) miatt g' a g inverz transzponáltja a fenti transzformációs szabály röviden: $K_P \mapsto (\text{Det}(g))^{-1} g K_P g^{-1}$. Ebből következik, hogy a K_P mátrix bármelyik hatványának átlósösszege egy relatív invariánst ad. Azonnal látható, hogy $\text{Tr } K_P = 0$ tehát relatív invariánsra a legegyszerűbb jelölt¹⁸

$$\mathcal{D}(P) \equiv \frac{1}{6} \text{Tr } (K_P)^2. \quad (3.67)$$

Valóban $\mathcal{D}(P)$ egy relatív invariáns a

$$\mathcal{D}(P) \mapsto (\text{Det}(g'))^2 \mathcal{D}(P). \quad (3.68)$$

transzformációs szabállyal.

¹⁵Ezen dolgozat szerzője a [18] cikk publikálása után egy Ilka Agricola [Agr08] nevű matematikus tudománytörténészről szerzett tudomást Walter Reichel [Rei07] több mint száz évvel ezelőtti munkájáról. A fizikusok szóhasználatával élve, PhD dolgozatában Reichel megtalálta a hat és hét egyrészecske állapottal rendelkező háromfermion állapotok SLOCC osztályait. Sajnos a régimódi formalizmus miatt Reichel dolgozata csaknem olvashatatlan. Modernebb jelölésekkel Reichel eredményeit Gurevich könyvében [Gur64] találhatjuk meg.

¹⁶Arra a tényre, hogy a fizikusok más kontextusban rendszeresen újrafelfedezik a matematikusok eredményeit egy másik jó példát szolgáltat a három qubit rendszerek klasszifikációja. A három-qubit SLOCC osztályokat megadó híres Dür-Vidal-Cirac [DVC00] cikk eredményei lényegében már ismertek voltak a matematikusok számára. Ezt illetően lásd például Gelfand, Kapranov és Zelevinsky könyvének 478. oldalát [GK94]. A probléma 2.5.1. alfejezetben tárgyalt legkorábbi megoldása (1881) Le Paige [LP81] és E. Schwartz [Sch22] nevéhez fűződik

¹⁷Ebben az alfejezetben $i, j, k, a, b, c = 1, 2, \dots, 6$.

¹⁸Az $1/6$ faktor eredetét az alábbiakban tisztázzuk.

Megmutatjuk, hogy a fenti mennyiség egy összefonódottsági mérték. Első lépésként csoportosítsuk a 20 amplitudót a (3.58), (3.59) és (3.60) formuláknak megfelelően. Ekkor $\mathcal{D}(P)$ az alábbi alakba írható

$$\mathcal{D}(P) = [\xi\eta - \text{Tr}(XY)]^2 - 4\text{Tr}(X^\sharp Y^\sharp) + 4\eta\text{Det}(X) + 4\xi\text{Det}(Y) \quad (3.69)$$

ahol X^\sharp és Y^\sharp az X és Y mátrixok adjungált mátrixai, $XX^\sharp = X^\sharp X = \text{Det}(X)I$ ahol I a 3×3 -as egység mátrix.

Vizsgáljuk most meg, hogy beágyazott három-qubit rendszerekre $\mathcal{D}(P)$ mit ad. A (3.45) leképezésnek megfelelően a P formából egy olyan új P_Ψ formát képezünk mely úgy keletkezik, hogy a P 20 amplitudójából azt a 8-at tartjuk meg melyek a (3.58) mennyiségeknek és a (3.59) illetve (3.60) mátrixok diagonális elemeinek felelnek meg. Ekkor belátható, hogy $\mathcal{D}(P_\Psi)$ (3.69) kifejezése a három qubit összefonódottság kapcsán használt (2.92) $D(\Psi)$ Cayley hiperdetermináns kifejezésébe megy át.

A (2.91) definíció alapján tudjuk, hogy a $\tau \equiv 4|D(\Psi)|$ mennyiség nem más mint az úgynevezett hármas összefonás, mely (normált állapotokra) lévén egy a $[0, 1]$ intervallumba eső összefonódási monoton, egy jó összefonódottsági mértéket definiál. Azt is tudjuk, hogy ez a mennyiség az összefonódottság (2.90) megosztásával kapcsolatos¹⁹. Mindezek alapján definiálhatjuk a

$$0 \leq \mathcal{T} \equiv 4|\mathcal{D}(P)| \leq 1 \quad (3.70)$$

háromfermionos összefonódottsági mértéket ahol $\mathcal{D}(P)$ vagy a (3.67) vagy pedig a (3.69) formulával számítható.

A későbbiekben szükségünk lesz a negyedrendű $\mathcal{D}(P)$ relatív invariáns egy másik alakjára is. Defináljuk $\wedge^3 V^*$ -n a

$$\{\cdot, \cdot\} : \wedge^3 V^* \times \wedge^3 V^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad (P, Q) \mapsto \frac{1}{3!3!} \varepsilon^{ijklmn} P_{ijk} Q_{lmn} \quad (3.71)$$

szimplektikus formát. Legyen továbbá \tilde{P} az a *duális* három forma melyet a (3.65) mennyiség segítségével a

$$\tilde{P} = \frac{1}{3!} \tilde{P}_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c, \quad \tilde{P}_{abc} = P_{bcd} (K_P)^d_a \quad (3.72)$$

kifejezések definiálnak. Ekkor a kvartikus invariáns az alábbi alakban is írható

$$\mathcal{D}(P) = \frac{1}{2} \{\tilde{P}, P\}. \quad (3.73)$$

Vegyük észre, hogy a (3.72) formula, egy másik az eredeti háromfermion állapot amplitúdóiban *köbös* fermion állapotot definiál. Továbbá amennyiben a (3.65) mátrixot egy $K_P = (K_P)^a_b e^b \otimes e_a$ endomorfizmus reprezentánsaként fogjuk fel ekkor $\text{Tr } K_P = 0$ miatt $K_P \in \mathfrak{sl}(6, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(6, \mathbb{C})$ és (3.33) felhasználásával kapjuk

$$(K_P)^* P = -\frac{1}{2} \text{Tr}(K_P) P + (K_P)^a_b e^b \wedge \iota_{e_a} P \quad (3.74)$$

azaz

$$\tilde{P} = \frac{1}{3} (K_P)^* P. \quad (3.75)$$

$\mathcal{D}(P) \neq 0$ esetén a \tilde{P} duális forma segítségével definiálhatunk egy *duális fermion állapotot*

$$\hat{P} \equiv -i \frac{\tilde{P}}{\sqrt{\mathcal{D}(P)}}. \quad (3.76)$$

¹⁹Az összefonódás megosztásával kapcsolatos (2.96) reláció fermionikus általánosítását illetően lásd a [SL14a] dolgozatot.

A duális állapotra igazak az alábbi összefüggések

$$\mathcal{D}(\hat{P}) = \mathcal{D}(P), \quad \hat{\hat{P}} = -P. \quad (3.77)$$

Vegyük észre azt is, hogy (a \tilde{P} mennyiséggel ellentétben) (3.68) és (3.76) miatt \hat{P} nem szed fel a SLOCC transzformációk determinánsával kapcsolatos faktorokat²⁰.

3.3.3. Három fermion hat egyrészecske állapottal. SLOCC osztályok [18]. A $\wedge^3 V^*$ három formák $V = \mathbb{C}^6$ esetén történő klasszifikációját először Walter Reichel [Rei07] adta meg 1907-ben. Ez a klasszifikáció megfelel a hat egyrészecske állapotos háromfermion rendszerek SLOCC klasszifikációjának [18]. A triviális osztályt is számolva összesen öt összefonódottsági osztály van. Legyen $e^{ijk} \equiv e^i \wedge e^j \wedge e^k$ ahol $i, j, k \in \{1, 2, 3, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ekkor a nemtriviális osztályok normált reprezentánsai az alábbiak

$$P_{GHZ} = \frac{1}{2}(e^{123} + e^{1\bar{2}\bar{3}} + e^{\bar{1}2\bar{3}} + e^{\bar{1}\bar{2}3}), \quad \mathcal{D}(P) \neq 0, \quad \tilde{P} \neq 0, \quad \Pi(P) \neq 0 \quad (3.78)$$

$$P_W = \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{123} + e^{1\bar{2}\bar{3}} + e^{\bar{1}\bar{2}3}), \quad \mathcal{D}(P) = 0, \quad \tilde{P} \neq 0, \quad \Pi(P) \neq 0 \quad (3.79)$$

$$P_{BISEP} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{123} + e^{1\bar{2}\bar{3}}), \quad \mathcal{D}(P) = 0, \quad \tilde{P} = 0, \quad \Pi(P) \neq 0 \quad (3.80)$$

$$P_{SEP} = e^{123}, \quad \mathcal{D}(P) = 0, \quad \tilde{P} = 0, \quad \Pi(P) = 0. \quad (3.81)$$

Itt a reprezentánsokon kívül megadtuk a (3.69) negyedrendű invariáns a (3.72) kovariáns és a (3.39) Plücker relációk jellemző értékeit is. A reprezentánsokat $P_{\mathcal{V}}$ alakba írtuk ezzel utalva arra, hogy ezeket a (3.45) formulával adott f beágyazás révén három qubit összefonódottsági osztályoknak feleltethetjük meg. Valóban a (2.132)-beli állapot f által létesített képe P_{GHZ} . Megjegyezzük, hogy amennyiben P_{GHZ} -re a (2.135)-ben használt Hadamard transzformációnak megfelelő (3.47) SLOCC transzformációval a (3.38) szabály szerint hatnánk akkor eredményül a $(e^{123} + e^{1\bar{2}\bar{3}})/\sqrt{2}$ kanonikus GHZ -szerű alakot kapnánk. Hasonlóan ha a (2.81) W -osztályba tartozó három qubit állapot f által létesített képére az $I \otimes I \otimes \sigma_X$ operátornak megfelelő (3.47) transzformációval hatunk akkor éppen P_W -t kapjuk. f ekvivarianciája miatt ez három qubit nyelven az

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |011\rangle + |101\rangle) = (I \otimes I \otimes \sigma_x) \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (3.82)$$

egyenlőség fennállásának felel meg. A fennmaradó P_{BISEP} és P_{SEP} állapotokat azonnal kapcsolatba hozhatjuk a biseparálható $|0\rangle \otimes (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ és szeparálható $|000\rangle$ reprezentánsokkal. Figyeljünk fel azonban arra a fontos tényre, hogy a 3.2.3. fejezetben mondtak szerint a $GL(6, \mathbb{C})$ fermionikus SLOCC csoport legbővebb olyan részcsoportha melyre nézve a $\mathcal{W} \subset \wedge^3 V^*$ beágyazott három qubit altér invariáns a $\tilde{G} = S_3 \ltimes G$ csoport ahol $G = GL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ a szokásos SLOCC csoport. Erre a permutációkkal kombinált \tilde{G} SLOCC csoportra nézve az $A(BC)$, $B(AC)$ és $C(AB)$ típusú SLOCC osztályok reprezentánsai már ekvivalensek. Ez felel meg annak a ténynek, hogy a fermionikus esetben az f beágyazás képtartományában már csak egyetlen biseparálható osztály van.

Láthatóan a (3.78)-(3.81) reprezentánsokkal jellemzett osztályokat jellemezhetjük a $\mathcal{D}(P)$ relatív invariáns a \tilde{P} kovariáns és a $\Pi(P)$ (3.39) Plücker relációk vizsgálatával. Ez utóbbi relációkat esetünkben az elegáns

$$\eta X = Y^\sharp, \quad \xi Y = X^\sharp, \quad \xi \eta I = XY \quad (3.83)$$

²⁰A duális háromfermion állapot tehát ugyanúgy viselkedik a SLOCC transzformációkkal szemben mint a szokásos P állapot. Azonban ezt az állapotot csak a $\mathcal{D}(P) \neq 0$ állapotokra definiáljuk.

alakba írhatjuk, ahol az (x, y, X, Y) mennyiségek definícióit illetően lásd a (3.58), (3.59) és (3.60) formulákat.

Ennek az alfejezetnek a fő eredményeként egy-egyértelmű megfeleltetést találtunk két nagyon különböző összefonódott rendszer SLOCC osztályai között. A kapott megfelelés hat egyrészcseke állapottal rendelkező három fermion rendszerek és három qubit rendszerek között áll fenn [Ehr99, 18]. Matematikailag

$$\wedge^3 \mathbb{C}^6 / GL(6) \leftrightarrow (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) / (GL(2) \times GL(2) \times GL(2) \rtimes S_3). \quad (3.84)$$

Fontos még megjegyeznünk azt is, hogy a kevésbé triviális

$$\wedge^3 \mathbb{C}^6 / U(6) \leftrightarrow (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) / (U(2) \times U(2) \times U(2) \rtimes S_3). \quad (3.85)$$

bijektív megfelelés is igaz. Ez azt jelenti, hogy a permutációkkal kombinált lokális unitér összefonódottsági osztályokra is egy-egyértelmű kapcsolat létezik [CDGZ13, CDGZ14]. Nyilván a (3.85) megfelelés a kvantum információelméletben sokkal fontosabb tekintettel arra, hogy valóságos kvantum manipulációkként a lokális unitér transzformációk egyszerűbben megvalósíthatók. A FLYQM során azonban a (3.84) megfelelés bizonyult fontosabbnak.

Alfejezetünk lezárásaként illusztráljuk a (3.70) összefonódottsági mérték szerepét. Tekintsük az alábbi két állapotot

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}e^{135} + e^{246}), \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{123} + e^{345} + e^{156}). \quad (3.86)$$

Ekkor az egyrészcsekes marginálisokra vonatkozó rövid számolás mutatja²¹

$$\varrho_1(P_1) = \varrho_1(P_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

azaz a marginálisok ugyanazok²². Azonban mivel

$$\mathcal{T}(P_1) = \frac{8}{9}, \quad \mathcal{T}(P_2) = 0 \quad (3.88)$$

az összefonódottsági mértékek különbözők. Tehát P_1 biztosan összefonódott és P_2 vagy összefonódott vagy biszeparálható vagy szeparálható. Azonban (3.72) alapján kapjuk

$$\tilde{P}_2 = -\frac{2}{9}\sqrt{3}e^{135} \neq 0 \quad (3.89)$$

s így (3.80) és (3.81) miatt P_2 nem lehet se szeparálható se biszeparálható, azaz P_1 és P_2 két különböző SLOCC osztályba tartozó összefonódott állapot. A fenti két összefonódott állapotot tehát a marginálisok sajátértékeinek vizsgálatával nem, de a \mathcal{T} mérték kiszámolásával már meg tudjuk különböztetni.

²¹A marginálisok definíciójában a kvantumkémiaiában használatos $\text{Tr } \varrho = N$ normálást használtuk, ahol N a fermionok száma.

²²Figyeljük meg, hogy a sajátértékeket a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_6$ nemnövekvő sorrendbe írva teljesülnek a $\lambda_i + \lambda_{7-i} = 1, i = 1, 2, \dots, 6$ és a $\lambda_5 + \lambda_6 \geq \lambda_4$ feltételek [BD72]. Ezek a 3-reprezentálhatóság szükséges és elégséges feltételei [BD72, Rus07].

3.3.4. Fermionikus GHZ-szerű állapotok [15]. Az előző alfejezetben láttuk, hogy a háromfermion hat egyrészecske állapotos rendszerek összefonódottsági lehetőségeit a (3.78) és (3.79) osztályokat reprezentáló P_{GHZ} és P_W állapotok fémjelzik. Ezen állapotok osztályait a $\mathcal{D}(P)$ invariáns és a \hat{P} kovariáns jellemzi. A GHZ-szerű osztály az úgynevezett "stabil" SLOCC osztálynak felel meg. Ez azt jelenti hogy a P_{GHZ} állapot Zariski topológiában vett tetszőleges környezetében találhatunk SLOCC ekvivalens állapotot. Más szóval a hat egyrészecske állapotos háromfermion állapotok terében a "GHZ-szerű" osztály egy nyílt sűrű SLOCC pályát alkot. Ez a fontos tény azzal kapcsolatos, hogy a fermionikus állapotvektorok a SLOCC csoporthatásra nézve egy *prehomogén vektorteret* alkotnak a SLOCC csoporthatásra nézve. A fenti tulajdonságú vektortereket a múlt század hetvenes éveiben Sato és Kimura osztályozta [SK77]. Látni fogjuk, hogy a dolgozatban tanulmányozott speciális összefonódott rendszerek csaknem mindegyike a Sato-Kimura klasszifikációs séma valamelyik esetének felel meg. Ez a megállapítás a stabilitás fent említett eszméjével kombinálva a dolgozat második felében alapvető fontosságúnak bizonyul.

Mutassuk meg, hogy a stabil pályán belül egy adott állapotot mindig kanonikus GHZ-szerű alakba transzformálhatunk! A $P_0 = e^{123} + e^{456}$ kanonikus GHZ-szerű állapotra a (3.65) mátrix a diagonális $\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$ alakot ölti. Ekkor $\mathcal{D}(P_0) = 1$ tehát a (3.76) duális háromfermion állapot alakja

$$\hat{P}_0 = -i(e^{123} - e^{456}). \quad (3.90)$$

Ebből láthatóan a $P_0 + i\hat{P}_0$ és $P_0 - i\hat{P}_0$ állapotok teljesen szeparálhatóak. Mivel P és \hat{P} a SLOCC csoporttal szemben kovariáns módon transzformálódnak ezért a fenti alakú komplex lineáris kombinációkra a szeparabilitási tulajdonság öröklődik. Ezért *tetszőleges* $\mathcal{D}(P) \neq 0$ alakú állapotra az

$$\Omega_{\pm} = P \pm i\hat{P} \quad (3.91)$$

állapotok teljesen szeparálható egydetermináns állapotok. Más szavakkal a $\mathcal{D}(P) \neq 0$ -val jellemzett "GHZ-szerű" SLOCC osztály tetszőleges eleme felírható a

$$P = \frac{1}{2}(\Omega_+ + \Omega_-) \quad (3.92)$$

kanonikus alakban, ahol a (3.91) egydetermináns komponensek megtalálásához a (3.76) és (3.72) képletekkel adott mennyiségeket kell kiszámítanunk. Megjegyezzük, hogy a kanonikus alakra hozás fenti módszere teljesen analóg a három qubit rendszerekre már tárgyalt hasonló eljárással²³. A fermionikus rendszerek által biztosított perspektíva azonban jelentős egyszerűsödést jelent. Ennek oka az, hogy három qubit rendszereinket a 2.5.3.-beli a permutációs szimmetriát sértő formalizmus helyett most egy a permutációs szimmetriát tiszteletben tartó formalizmus segítségével tárgyaltuk.

3.3.5. Valós fermionikus SLOCC osztályok [15]. A későbbiekben szükségünk lesz a valós fermionikus SLOCC osztályokra is. Ekkor $V = \mathbb{R}^6$ és a megfelelő SLOCC csoport $GL(6, \mathbb{R})$. A triviális osztályt nem számolva, a komplex eset 4 osztályával szemben, 5 SLOCC osztályt kapunk. Az extra SLOCC osztály a GHZ-szerű osztály két osztályra történő felhasadásából adódik. Az egyik osztályra $\mathcal{D}(P) > 0$ a másikra $\mathcal{D}(P) < 0$. A jelenség teljesen analóg a valós három qubit rendszereknél már tárgyalt jelenséggel. A (3.45) $f : |\Psi\rangle \mapsto P_{\Psi}$ beágyazás segítségével a két osztály reprezentánsai a

$$P_{GHZ+} = \frac{1}{2}(e^{123} + e^{156} + e^{264} + e^{345}) \quad (3.93)$$

$$P_{GHZ-} = \frac{1}{2}(e^{123} - e^{156} - e^{264} - e^{345}) \quad (3.94)$$

²³Vessük össze a fentiekben használt összefüggéseket a (2.112), (2.115), (2.116) és a (2.120) összefüggésekkel.

alakba írhatók. Itt a $P_{GHZ\pm}$ állapotok a (2.131) és (2.132) formulákkal jellemzett $|GHZ_{\pm}\rangle$ három qubit állapotok f által létesített képei.

Legyen

$$F^{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{1,2,3} + e^{4,5,6}), \quad F^{\bar{1},\bar{2},\bar{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{1,2,3} - e^{4,5,6}) \quad (3.95)$$

egy új bázis V -n ekkor

$$P_{GHZ+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F^{123} + F^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}}). \quad (3.96)$$

Hasonlóan amennyiben a $V \otimes \mathbb{C}$ komplexifikált téren

$$E^{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{1,2,3} + ie^{4,5,6}), \quad \overline{E^{1,2,3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{1,2,3} - ie^{4,5,6}) \quad (3.97)$$

akkor a (3.76) definícióban szereplő \hat{P} duális fermion állapot tiszta képzetes választással²⁴

$$P_{GHZ-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E^{123} + \overline{E^{123}}). \quad (3.98)$$

Nyilván a fenti formulák speciális esetei az előző alfejezetben tárgyalt (3.91) és (3.92) formulákon alapuló kanonikus dekompozíciónak. Ha $\mathcal{D}(P) > 0$ akkor a (3.76) definícióban szereplő \hat{P} duális fermion állapot tiszta képzetes tehát a (3.91)-ben szereplő Ω_{\pm} teljesen szeparálható egy-determináns komponensek valóságok. Másrészt ha $\mathcal{D}(P) < 0$ akkor \hat{P} duális fermion állapot valós tehát a Ω_{+} és Ω_{-} egymás komplex konjugáltjai. Ebben az esetben tehát csak a komplexifikált $V \otimes \mathbb{C}$ térben írható fel kanonikus GHZ-szerű alak.

Az utóbbi esetben legyen

$$J_P \equiv \frac{K_P}{\sqrt{-\mathcal{D}(P)}}. \quad (3.99)$$

Ekkor $K_P^2 = \mathcal{D}(P)I$ miatt

$$J_P^2 = -I \quad (3.100)$$

Ez azt jelenti, hogy amennyiben adott egy olyan P valós három fermion állapot melyre $\mathcal{D}(P) < 0$ akkor az egyrészescke állapotok valós $V = \mathbb{R}^6$ térén P egy J_P komplex struktúrát definiál. A (3.97) képletekből látható, hogy a P_{GHZ-} speciális esetben éppen a kanonikus komplex struktúrát kapjuk. A (3.98) kanonikus előállítás azt mutatja, hogy az általános esetben az ilyen P által definiált komplex struktúrával ellátott hat dimenziós téren P egy *holomorf* és egy *antiholomorf* háromforma összegeként állítható elő. Ekkor célszerű a (3.91)-ben definiált Ω_{+} és Ω_{-} formák helyett az $(3,0)$ típusú Ω és a $(0,3)$ típusú $\bar{\Omega}$ jelölést bevezetni. Ekkor²⁵

$$P = \frac{1}{2}(\Omega + \bar{\Omega}). \quad (3.101)$$

Jelöljük most a hatdimenziós térfogatelemnek megfelelő hat formát az alábbi módon

$$\mathbb{E} \equiv e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \wedge e^5 \wedge e^6 \quad (3.102)$$

Ekkor

$$P \wedge Q = \{P, Q\}\mathbb{E} \quad (3.103)$$

²⁴Felülhúzással most a komplex konjugált mennyiségeket jelöltük.

²⁵Érdemes a fenti fejtegetéseket a 2.5.5.-ben elmondottakkal összevetni.

ahol $\{\cdot, \cdot, \cdot\}$ a (3.71)-ben definiált szimplektikus struktúra. Így (3.73), (3.76) és (3.70) felhasználásával kapjuk, hogy $\mathcal{D}(P) < 0$ esetén²⁶

$$P \wedge \hat{P} = 2\sqrt{-\mathcal{D}(P)}\mathbb{E} = \sqrt{\mathcal{T}(P)}\mathbb{E}. \quad (3.104)$$

Mutassuk meg, hogy amennyiben a $\mathcal{D}(P) < 0$ -nek eleget tevő valós P háromformák $\wedge^3\mathbb{R}^6$ vektortérét egy a (3.71) által meghatározott szimplektikus formával ellátott klasszikus mechanikai rendszernek tekintjük akkor a

$$H(P) \equiv \sqrt{-\mathcal{D}(P)}, \quad X_H \equiv -\hat{P} \quad (3.105)$$

mennyiségek Hamilton függvényt és neki megfelelő Hamiltoni vektormezőt adnak.

Valóban, tekintsünk egy $P(t)$ fázistérbeli görbét, ekkor \hat{P} egy a görbén értelmezett vektormező. Ekkor (3.101) felhasználásával

$$\dot{P} = \frac{1}{2}(\dot{\Omega} + \bar{\dot{\Omega}}), \quad \hat{P} = \frac{1}{2i}(\Omega - \bar{\Omega}) \quad (3.106)$$

s így²⁷

$$\{\dot{P}, \hat{P}\}\mathbb{E} = \frac{i}{4}(\Omega \wedge \bar{\dot{\Omega}} + \dot{\Omega} \wedge \bar{\Omega}). \quad (3.107)$$

Másrészt (3.104)

$$\sqrt{-\mathcal{D}(P)}\mathbb{E} = \frac{i}{4}\Omega \wedge \bar{\Omega} \quad (3.108)$$

alakban is felírható, s így ennek a deriváltját (3.107)-val kombinálva kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\sqrt{-\mathcal{D}(P)} = \{-\hat{P}, \dot{P}\} \quad (3.109)$$

ez pedig egy $dH(v) = \omega(X_H, v)$ alakú kifejezés ahol ω egy tetszőleges fázistéren adott szimplektikus forma, v a fázistér egy vektormezője, $dH(v)$ pedig a Hamilton függvény v irány menti deriváltja. Ezzel a (3.105) összefüggést beláttuk.

Végezetül figyeljünk fel arra, hogy a (3.66) mátrix egy olyan $K_P = K_P^a{}_b e^b \otimes e_a$ endomorfizmust definiál mely invertálható és az átlósösszege zérus. Tehát K_P természetes módon kapcsolatba hozható azzal a $\mu : \wedge^3\mathbb{R}^6 \rightarrow sl^*(V)$ leképezéssel²⁸ melyre $P \mapsto K_P$. Megmutatható, hogy a fenti μ leképezés az úgynevezett momentum leképezés [Hit00].

3.4. Három fermion hét egyrészecske állapottal

3.4.1. Alapvető invariánsok és kovariánsok [15, SL14b]. Ebben a fejezetben hét egyrészecske állapotos háromfermion rendszereket tekintünk. Legyen most $V = \mathbb{C}^7$ és a háromfermionos állapot reprezentánsaként tekintsünk egy

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3!}\mathcal{P}_{I_1 I_2 I_3} e^{I_1} \wedge e^{I_2} \wedge e^{I_3} \in \wedge^3 V^* \quad (3.110)$$

háromformát ahol $\{e^I\}_{I=1}^7$ a V^* tér bázisa²⁹. A SLOCC csoport most $GL(V) = GL(7, \mathbb{C})$ és a megfelelő csoporthatás a megfelelő változtatások után ismét a (3.64) alakú.

Tekintsük az alábbi kovariánsokat

$$(M^A)^B{}_C = \frac{1}{12}\varepsilon^{ABI_1 I_2 I_3 I_4 I_5} \mathcal{P}_{CI_1 I_2} \mathcal{P}_{I_3 I_4 I_5} \quad (3.111)$$

²⁶Természetesen a \mathcal{T} bevezetése csak a valós normált háromfermion állapotok esetén értelmes. Ekkor a $P \wedge \hat{P} = \sqrt{\mathcal{T}(P)}\mathbb{E}$ egyenlet egy szép összefüggést ad a háromfermion állapotok, a duáltjuk, és a \mathcal{T} összefonódottsági mérték között. A FLYQM során azonban az állapotok nem normáltak így a $\mathcal{T}(P)$ bevezetésének nincs különösebb jelentősége.

²⁷ $\Omega \wedge \bar{\Omega} = 0$ hiszen $\Omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$ valamilyen ω_i egy-formákra.

²⁸A $\text{Tr}(XY)$ skalárszorzat segítségével az $sl(V)$ Lie-algebrát azonosíthatjuk a duáltjával.

²⁹Ebben a fejezetben $I, J, A, B, C = 1, \dots, 7$ illetve $i, j, a, b, c = 1, \dots, 6$.

$$N_{AB} = \frac{1}{24} \varepsilon^{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 i_6 I_7} \mathcal{P}_{AI_1 I_2} \mathcal{P}_{BI_3 I_4} \mathcal{P}_{I_5 I_6 I_7} \quad (3.112)$$

$$L^{AB} \equiv (M^A)^C{}_D (M^B)^D{}_C. \quad (3.113)$$

A kovariánsok transzformációs tulajdonságait a

$$(M^A)^B{}_C \mapsto (\text{Det } g') g^A{}_D g^B{}_E g'^F{}_C (M^D)^E{}_F \quad (3.114)$$

$$N_{AB} \mapsto (\text{Det } g') g'^C{}_A g'^D{}_B N_{CD} \quad (3.115)$$

$$L^{AB} \mapsto (\text{Det } g')^2 g^A{}_C g^B{}_D L^{CD} \quad (3.116)$$

formulák mutatják.

Célszerű a hét egyrészecske állapotos esetünket visszavezetni az előzőekben tanulmányozott hat egyrészecske állapotos esetre. Ebből a célból a hét komplex dimenziós V vektorteret egy hat és egy az e_7 vektor által kifeszített egy dimenziós vektortér direkt összegére bontjuk. Ekkor írható, hogy

$$\mathcal{P} = P + \omega \wedge e^7 \quad (3.117)$$

ahol P (3.63) alakú és

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij} e^i \wedge e^j \quad (3.118)$$

egy két forma. Ezzel a $35 = 20 + 15$ felbontással a \mathcal{P} három forma komponenseit elegáns módon jellemezhetjük.

Az \mathbf{N} és \mathbf{L} kovariánsokból az alábbi hetedrendű relatív invariánst képezhetjük

$$\mathcal{J}(\mathcal{P}) \equiv \frac{1}{2^4 3^2 7} \text{Tr}(\mathbf{L}\mathbf{N}) = \frac{1}{2^4 3^2 7} L^{AB} N_{AB} \quad (3.119)$$

ahol az invariáns normálását a későbbiekben tisztázzuk. SLOCC transzformációkkal szemben a fenti relatív invariáns a

$$\mathcal{J}(\mathcal{P}) \mapsto (\text{Det } g')^3 \mathcal{J}(\mathcal{P}). \quad (3.120)$$

módon transzformálódik.

A (3.117) felbontást felhasználva a $\mathcal{J}(\mathcal{P})$ invariáns meglehetősen komplikált alakú. Tegyük fel azonban, hogy a (3.118) két forma a V hatdimenziós részen egy szimplektikus formát definiál és követeljük meg, hogy P kompatibilis ezzel a szimplektikus struktúrával. Ez azt jelenti, hogy a (3.56) feltétel teljesül és ekkor (3.65) és (3.69) felhasználásával kapjuk³⁰

$$\mathbf{N} = \left(\begin{array}{c|c} -3\omega & 0 \\ \hline 0 & 6\text{Pf}(\omega) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.121)$$

$$\mathbf{L} = \left(\begin{array}{c|c} -12\tilde{\omega} & 0 \\ \hline 0 & 6 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{D}(P) \end{array} \right) \quad (3.122)$$

ahol

$$\text{Pf}(\omega) = \frac{1}{2^3 3!} \varepsilon^{ijklmn} \omega_{ij} \omega_{kl} \omega_{mn} \quad (3.123)$$

és

$$\tilde{\omega}^{ij} = \frac{1}{8} \varepsilon^{ijklmn} \omega_{kl} \omega_{mn}. \quad (3.124)$$

A fenti két kovariáns kifejezésében a szimplektikus struktúrára és a P háromformára vonatkozó információ tehát faktorizálódik. Vegyük észre, hogy az \mathbf{N} mátrix szimmetrikus tehát ω és \mathbf{K} antikommutál. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathcal{J}(\mathcal{P}) = \frac{1}{4} \text{Pf}(\omega) \mathcal{D}(P). \quad (3.125)$$

³⁰A (3.65) definícióban szereplő 6×6 -os mátrixot az egyszerűség kedvéért most a P index elhagyásával \mathbf{K} -val jelöltük.

Hasznos relatív invariánsként definiálhatnánk még a $\text{Det}(\mathbf{N})$ vagy a $\text{Det}(\mathbf{L})$ mennyiségeket. Azonban könnyen belátható, hogy ezek egyike sem független a (3.119)-ben definiált $\mathcal{J}(\mathcal{P})$ relatív invariánstól. Valóban például (3.121) felhasználásával $\text{Det}(\mathbf{N})$ -re kapjuk, hogy

$$\text{Det}(\mathbf{N}) = -6 \cdot (9 \text{Pf}(\omega) \mathcal{D}(P))^3 \quad (3.126)$$

tehát arányos a (3.125) invariáns köbével³¹.

Amennyiben $V = \mathbb{R}^7$ a speciális holonómiájú sokaságok elméletében gyakran feltűnik a szimmetrikus [RSAC05, Hit00, Hit03, Bry87]

$$\mathcal{B}_{IJ} = -\frac{1}{6} N_{IJ}. \quad (3.127)$$

mátrix. A (3.119)-ben használt normálással ekkor a fenti mátrix determinánsára az elegáns

$$\text{Det} \mathcal{B} = (\mathcal{J}(\mathcal{P}))^3 \quad (3.128)$$

összefüggést kapjuk.

Mivel a $\mathcal{J}(P)$ relatív invariáns (3.125) miatt természetes módon kapcsolatba hozható a (3.70) fermionikus összefonódottsági mértékkel, ezért a (3.119) mennyiség abszolútértékét egy meghatározott konstanssal szorozva azt egy összefonódottsági mértéknek tekinthetjük. A konstans értékét célszerű úgy választani, hogy az egy meghatározott normált összefonódott reprezentánsra az 1 értéket szolgáltatassa. Szerencsére a következő alfejezetben kiderül, hogy pontosan egy olyan SLOCC osztály van amelyre a fenti mérték zérustól különböző értéket ad. Tehát a fenti konstans faktort ezen osztály egy alkalmas reprezentánsa segítségével célszerű rögzíteni. Ez a jelenség a hat egyrészeecske állapotos esetre emlékeztet, ahol ez a SLOCC osztály a "GHZ-szerű" osztály volt a (3.78) reprezentánssal, melyre a (3.70) mennyiség értéke 1.

3.4.2. SLOCC osztályok [15, SL14b]. A hét egyrészeecske állapottal rendelkező háromfermion állapotok [15] SLOCC klasszifikációjával ekvivalens matematikai problémát Reichel oldotta meg [Rei07] 1907-ben. Az eredmény csaknem negyed évszázadra a feledés homályába merült. 1931-ben Schouten [Sch31] egyszerűbb módszerek alkalmazásával reprodukálta Reichel eredményeit, ugyanakkor kiderítette hogy Reichel klasszifikációja nem teljes. A nemtriviális osztályok száma nem hét hanem kilenc. A SLOCC osztályok egyike több szempontból is hasonló szerepet tölt be mint a GHZ-osztály a három qubit rendszerek és a GHZ-szerű osztály a hat egyrészeecske állapotos háromfermion rendszerek esetén.

Jelöljük a hétdimenziós komplex V vektortér duális terének kanonikus bázisvektorait e^A -val a hatdimenziós altér bázisvektorait pedig e^a -val. Tekintsük az alábbi komplex lineáris kombinációkat

$$E^{1,2,3} = e^{1,2,3} + ie^{4,5,6}, \quad E^{\bar{1},\bar{2},\bar{3}} = e^{1,2,3} - ie^{4,5,6}, \quad E^7 = ie^7. \quad (3.129)$$

Ekkor a hat egyrészeecske állapotos eset GHZ -szerű állapotainak reprezentánsa a szokásos

$$E^{123} + E^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = 2(e^{123} - e^{156} + e^{246} - e^{345}) \quad (3.130)$$

állapot. Adjuk ehhez az állapothoz az $(E^{\bar{1}\bar{1}} + E^{2\bar{2}} + E^{3\bar{3}}) \wedge E^7$ állapotot. A fenti új állapot egy maximális rangú szimplektikus két forma kanonikus alakját tartalmazza komplex alakban. Vegyük észre, hogy az így keletkező \mathcal{P}_0 állapot (3.117) alakú ahol a P és ω komponens formák mindegyike nem degenerált³². Ekkor írható, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= \frac{1}{2} (E^{123} + E^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} + E^{1\bar{1}7} + E^{2\bar{2}7} + E^{3\bar{3}7}) \\ &= e^{123} - e^{156} + e^{246} - e^{345} + e^{147} + e^{257} + e^{367}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

³¹ Itt kihasználtuk, hogy $\text{Det}(K) = -\mathcal{D}^3$ mely a $K^2 = \mathcal{D}1$ és a $\text{Tr}(K) = 0$ formulákból és a Newton identitásokból adódik, továbbá felhasználtuk azt is, hogy $\text{Det}(\omega) = (\text{Pf}(\omega))^2$.

³²Definíció szerint a P háromforma nem degenerált ha $\mathcal{D}(P) \neq 0$.

A \mathcal{P}_0 állapotot a hét egyrészecske állapotos eset GHZ-szerű állapotának fogjuk hívni.

Mutassuk meg, hogy a fenti állapot valóban sok szempontból "GHZ-szerűen" viselkedik! Először is egy rövid számolás mutatja, hogy

$$\mathcal{B}_{IJ} = \delta_{IJ}, \quad \mathcal{J}(\mathcal{P}_0) = 1 \quad (3.132)$$

azaz akárcsak a szokásos GHZ állapotokra az alapvető relatív invariáns a megfelelő SLOCC osztályon nem zérus. Másodszor, ha a \mathcal{P}_0 állapotot egyre normáljuk és kiszámoljuk az egyrészecskés marginálisokat³³ akkor kapjuk, hogy

$$\rho_1 \equiv \text{Tr}_{23} |\mathcal{P}_0\rangle\langle\mathcal{P}_0| = \frac{1}{7} \mathbf{1}. \quad (3.133)$$

A kapott marginális, akárcsak a kanonikus három qubit GHZ állapot esetén, teljesen kevert állapotot reprezentál.

A fenti reprezentáns $GL(7, \mathbb{C})$ pályája egy speciális SLOCC osztályt határoz meg. A pálya nyílt a Zariski topológiában és a prehomogén vektorterek egy újabb példáját szolgáltatja [SK77]. Fizikai szempontból ez azt jelenti, hogy amennyiben találunk egy olyan \mathcal{P} háromfermionos állapotot melyre $\mathcal{J}(\mathcal{P}) \neq 0$ akkor ennek tetszőleges környezetében is található egy vele SLOCC ekvivalens hasonló tulajdonságú állapot. Az ilyen tulajdonságú állapotokat reprezentáló formákat *stabil* formáknak nevezik [Hit01]. Általában $\wedge^p \mathbb{C}^N$ -ben a nyílt $GL(N, \mathbb{C})$ pályák létezésének szükséges feltétele $N^2 \geq \binom{N}{p}$. Figyeljük meg, hogy $p = 2$ -re a feltétel mindig, de $p = 3$ -ra csak $N \leq 8$ -ra teljesül. Legyen

$$G_{\mathcal{P}} \equiv \{g \in GL(7, \mathbb{C}) | \mathcal{P} = g^* \mathcal{P}\} \quad (3.134)$$

egy tetszőleges három forma izotrópia csoportja. Ekkor a nyílt GHZ-szerű SLOCC-osztályba eső állapotokra

$$\dim G_{\mathcal{P}} = \dim GL(7, \mathbb{C}) - \dim \wedge^3 \mathbb{C}^7 = 14. \quad (3.135)$$

Friedrich Engel 1900-ban megmutatta [Eng00], hogy a fenti izotrópia csoport a G_2 egyszerű kivételes csoporttal izomorf³⁴. Pontosabban [SK77]

$$G_{\mathcal{P}} = G_2^{\mathbb{C}} \times \{\varepsilon \mathbf{1} | \varepsilon^3 = 1\} \quad (3.136)$$

ahol $\mathbf{1}$ a 7×7 -es egységmátrix. Ismeretes, hogy a $G_2^{\mathbb{C}}$ kivételes csoport az \mathbb{O} októnió algebra komplexifikáltjának automorfizmus csoportja [FH91].

Mutassuk meg, hogy a \mathcal{P}_0 állapot nemzérus amplitudóiba valóban az októniók szorzótáblája van "belekódolva"! Tekintsük az ábrán látható Fano síkot³⁵. A Fano sík pontjait címkéző e^1, \dots, e^7 szimbólumok most kettős szerepet töltenek be. Egyrészt a már megszokott V^* vektortér bázisvektorai, másrészt egy olyan egység elemmel rendelkező kompozíciós algebra³⁶ elemei ahol a szorzás műveletét a nyilak segítségével az alábbi módon definiáljuk. A nyilak irányában haladva két elem szorzata ciklikusan mindig a harmadikat adja. Ha a nyállal ellentétesen haladunk akkor a harmadik negatívját. Például

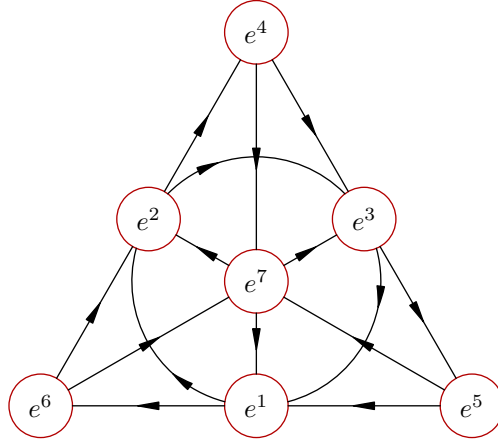
$$e^2 e^4 = -e^4 e^2 = e^6, \quad e^4 e^6 = -e^6 e^4 = e^2, \quad e^6 e^2 = -e^2 e^6 = e^4. \quad (3.137)$$

³³Bármelyiket elég, hiszen a részecskék megkülönböztethetlensége miatt a marginálisok egyenlők. Az egyrészecskés marginálisok most 7×7 -es mátrixok.

³⁴Engel cikkében található annak bizonyítása is, hogy pontosan egy stabil pálya létezik. Engel muatta meg azt is, hogy a \mathcal{J} hetedrendű polinom létezik és a (3.128) kapcsolatban kell, hogy legyen azzal a nemdegenerált szimmetrikus bilineáris formával melynek \mathcal{B} mátrixát (3.127)-ben definiáltuk.

³⁵A Fano sík a \mathbb{Z}_2 két elemű test feletti projektív sík. A Fano sík pontjai az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmaz egy elemű, az egyenesei pedig a halmaz három elemű részhalmazainak feleltethetők meg. Az ábra csak a pontok és az egyenesek incidenciáját hivatott érzékeltetni. Az ábra igazából az írányított Fano sík ahol minden egyenes szakasz egy a nyíl irányában ciklikusan körbejárt körként képzelendő el.

³⁶A \mathcal{C} algebra kompozíciós algebra ha rajta megadható egy olyan kvadrátikus $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ forma (a "norma") melyre $\forall x, y \in \mathcal{C}$ esetén $N(xy) = N(x)N(y)$.



3.1. ábra. A Fano sík.

Az e^I báziselemeket képzetes egységeknek képzeljük el melyekre

$$(e^I)^2 = -e^0 \quad (3.138)$$

ahol e^0 az algebra egység eleme. Ekkor a komplexifikált októnióalgebra egy tetszőleges σ elemét a $\sigma = \sum_{I=0}^7 \sigma_I e^I$ kifejezéssel értelmezzük, ahol $\sigma_I \in \mathbb{C}$. Az ábra alapján ellenőrizhető, hogy az októniószorzás nem asszociatív.

Könnyen megmutatható, hogy a 3.1. ábrán látható módon címkézett Fano síkot nem csak az októniók szorzótáblájának memorizálására, hanem a stabil SLOCC osztályba tartozó \mathcal{P}_0 három-fermion állapot szerkezetének megértésére is használhatjuk. Valóban, felejtkezzünk most el arról, hogy V^* -nak kompozíciós algebrai struktúra adható, és legyenek a Fano sík pontjainak címkéi a bázis egy-formák. Ha az egy egyeneshez tartozó egy-formákat a nyílnak megfelelő sorrendben ék szorozzuk majd a különböző egyenesekhez tartozó teljesen szeparálható három formákat előjel helyesen összeadjuk akkor éppen a \mathcal{P}_0 állapotot kapjuk.

A következőkben a SLOCC összefonódottsági osztályok reprezentánsainak elegáns jellemzésére egy a 3.1. ábrán alapuló képet használunk [SL14b]. A triviális osztályt is figyelembe véve összesen 10 SLOCC osztályunk van.

I. Ez az osztály a triviális "NULL" állapotból áll.

II. Az osztály a teljesen szeparálható, egydetermináns alakban felírható "SEP" állapotokból áll. Reprezentánsul a

$$\mathcal{P}_{SEP} = e^{367} \quad (3.139)$$

állapotot választjuk. Ez a Fano sík 367 egyenesének felel meg. A \mathcal{P}_0 állapotból egyetlen tagot tartunk meg.

III. Az osztály a biszeparálható "BISEP" állapotokból áll

$$\mathcal{P}_{BISEP} = e^{367} + e^{257} \quad (3.140)$$

reprezentánssal. Ez a Fano sík azon két 367 és 257 egyenesének felel meg melyek egy pontban metszik egymást. A \mathcal{P}_0 állapotból két tagot tartunk meg.

IV. Az osztály a hat egyrészezske állapotos esetén már megismert "W" állapotokból áll

$$\mathcal{P}_W = e^{246} - e^{345} - e^{156} \quad (3.141)$$

reprezentánssal. A \mathcal{P}_0 állapotból láthatóan most három tagot tartunk meg. Ezek a tagok a Fano sík 624, 435 és 516 egyenesei által meghatározott háromszöget határozzák meg. Az állapotot a

$-e^{426} - e^{453} - e^{156}$ alakba írva a szokásos 4, 5, 6 = $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ jelöléssel a (3.79) W-állapot ellentettjét kapjuk.

V. Ez az osztály a hat egyrészecske állapotos GHZ-szerű osztállyal egyezik meg. A

$$\mathcal{P}_{GHZ} = e^{123} - e^{156} + e^{246} - e^{345} \quad (3.142)$$

reprezentáns a \mathcal{P}_0 állapot megfelelő négy nemzérus amplitudót tartalmazó része. Az állapot grafikus reprezentánsául az előzőekben már tárgyalt egyenlő oldalú háromszöget célszerű elképzelni mely most a Fano sík 123 körét is tartalmazza. Egy ekvivalens kép: a GHZ állapot grafikus reprezentánsát kapjuk ha a Fano sík három egy pontban metsző egyenesét elhagyjuk. Természetesen ez az állapot a (3.130) kanonikus alakba is írható.

VI. A (3.117) felbontásnak megfelelően ennek az osztálynak a reprezentánsául a hétdimenziós vektortérünk hatdimenziós alterén definiált ω maximális rangú szimplektikus formának e^7 -vel való ék szorzatát választjuk ($P = 0$).

$$\mathcal{P}_{SYMP/NULL} = e^{147} + e^{257} + e^{367}. \quad (3.143)$$

A grafikus reprezentáns a Fano sík három egy pontban találkozó egyenese. Ezen állapot komplementuma az előző pontban tárgyalt GHZ-állapot.

VII. Ezt az osztályt a "SYMP/SEP" módon jelöljük annak megfelelően, hogy a (3.117) előállításban a maximális rangú szimplektikus forma mellett egy \mathcal{P}_{SEP} állapot is szerepel. A reprezentáns a \mathcal{P}_0 állapot

$$\mathcal{P}_{SYMP/SEP} = e^{123} + e^{147} + e^{257} + e^{367} \quad (3.144)$$

része. A grafikus reprezentáns most egy körből és három egy pontban metsző egyenesből áll. Ez a diagram a W-osztálynak megfelelő diagram komplementuma.

VIII. Ennek az osztálynak a reprezentánsa a

$$\mathcal{P}_{SYMP/BISEP} = e^{123} - e^{156} + e^{246} - e^{345} + e^{147} \quad (3.145)$$

állapot mely \mathcal{P}_0 öt tagját tartalmazza. Az állapot első négy tagja épp a GHZ állapotot adja. Ehhez járul egy teljesen szeparált e^{147} állapot. Az állapot struktúráját azonban a "SYMP/BISEP" rövidítés pontosabban jellemzi. Valóban a fenti állapot a $P + \omega \wedge e^4$ alakban is felírható ahol most a megfelelő hatdimenziós altér e^4 kiegészítő altere. Ekkor $P = e^{123} - e^{156}$ egy biszeparálható állapot, és ω egy a kiegészítő altéren definiált maximális rangú szimplektikus forma. A grafikus reprezentációban szereplő öt egyenes komplementuma két egy pontban metsző egyenes, azaz pontosan a **II.** osztályt jellemző biszeparálható állapotnál kapott elrendezés komplementuma.

IX. Ennek az osztálynak a reprezentánsa a

$$\mathcal{P}_{SYMP/W} = e^{123} - e^{156} + e^{246} - e^{345} + e^{147} + e^{257} \quad (3.146)$$

állapot mely első ránézésre a négytagú GHZ állapot és egy biszeparálható állapot kombinációjának tekinthető. Azonban ahogy a reprezentáns elnevezése is sugallja az állapot helyesebb két darab három tagból álló állapot kombinációjaként felfogni. Valóban, állapotunk ismét $P + \omega \wedge e^4$ alakba írható ahol most $P = e^{123} - e^{156} + e^{257}$ a megfelelő kiegészítő altér W osztályba tartozó állapota. A grafikus reprezentáció most hat egyenest tartalmaz mely a közönséges teljesen szeparálható állapot egyenesének komplementuma.

X. Ez a stabil pályának megfelelő GHZ-szerű SLOCC osztály. Ezt az osztályt a \mathcal{P}_0 állapot és a teljes Fano sík reprezentálja. A Fano sík komplementumának az **I.** "NULL" osztály felel meg.

Ezzel mind a 10 osztály reprezentánsait sikerült a hat egyrészecske állapotos eset SLOCC osztályait jól látható módon magába foglaló alakra hozni. Valóban, az **I.-V.** osztályok éppen a hat egyrészecske állapotos osztályok. A fennmaradó öt osztály reprezentánsait pedig mindig

felírhatjuk $P + \omega \wedge u$ alakban ahol P a fenti öt osztály kanonikus reprezentánsa ω egy maximális Slater rangú kanonikus alakú szimplektikus forma, és u egy alkalmasan választott bázis egy-forma. A fenti megfontolások eredményeképp nyilvánvaló, hogy a reprezentánsok alkalmas $E^1, E^2, E^3, E^{\bar{1}}, E^{\bar{2}}, E^{\bar{3}}, E^7$ bázis választással mindig a 3.1. táblázatban szereplő kanonikus alakokra hozhatók.

Név	Típus	Kanonikus alak
I	NULL	0
II	SEP	E^{123}
III	BISEP	$E^1 \wedge (E^{23} + E^{\bar{2}\bar{3}})$
IV	W	$E^{12\bar{3}} + E^{1\bar{2}3} + E^{\bar{1}23}$
V	GHZ	$E^{123} + E^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}}$
VI	SYMPL/NULL	$(E^{1\bar{1}} + E^{2\bar{2}} + E^{3\bar{3}}) \wedge E^7$
VII	SYMPL/SEP	$(E^{1\bar{1}} + E^{2\bar{2}} + E^{3\bar{3}}) \wedge E^7 + E^{123}$
VIII	SYMPL/BISEP	$(E^{1\bar{1}} + E^{2\bar{2}} + E^{3\bar{3}}) \wedge E^7 + E^1 \wedge (E^{23} + E^{\bar{2}\bar{3}})$
IX	SYMPL/W	$(E^{1\bar{1}} + E^{2\bar{2}} + E^{3\bar{3}}) \wedge E^7 + E^{123} + E^{1\bar{2}3} + E^{\bar{1}23}$
X	SYMPL/GHZ	$(E^{1\bar{1}} + E^{2\bar{2}} + E^{3\bar{3}}) \wedge E^7 + E^{123} + E^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}}$

3.1. táblázat. Hét egyrészeecske állapottal rendelkező háromfermionos rendszerek SLOCC osztályai.

3.4.3. Valós háromfermion állapotok [15]. A valós számtest felett is megadhatók a SLOCC osztályok. Ebben az esetben $V = \mathbb{R}^7$ és a $G = GL(7, \mathbb{R})$ csoport hatását kell tekintenünk $\wedge^7 V^*$ -n. Ekkor a hat dimenziós esethez hasonlóan két stabil GHZ-szerű pályát kapunk. Az egyik pálya reprezentánsa továbbra is a $\mathcal{P}_0 \equiv \mathcal{P}_-$ állapot ahol

$$\mathcal{P}_- = e^{123} - e^{156} + e^{246} - e^{345} + e^{147} + e^{257} + e^{367} = P_{GHZ_-} + \omega_0 \wedge e^7 \quad (3.147)$$

ahol

$$\omega_0 = e^{14} + e^{25} + e^{36} \quad (3.148)$$

és P_{GHZ_-} most a nemnormált (3.94) állapotot jelöli. Ennek az állapotnak a G -beli stabilizátora a $G_2^{\mathbb{C}}$ komplex csoport valós kompakt alakja: G_2 . Erre az állapotra most is a (3.132) összefüggések teljesülnek, és az állapot geometriai reprezentánsául a 3.1. ábrán látható módon irányított Fano sík szolgál.

A másik valós stabil SLOCC osztály reprezentánsa a

$$\mathcal{P}_+ = e^{123} + e^{156} - e^{246} + e^{345} - e^{147} - e^{257} - e^{367} = P_{GHZ_+} - \omega_0 \wedge e^7 \quad (3.149)$$

ahol P_{GHZ_+} most a nemnormált (3.93) állapot. Az állapotra az (3.125) invariáns értéke továbbra is egy, azonban a (3.127) mátrix most a $\text{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1, -1\}$ diagonális alakot ölti. Ennek az állapotnak a G -beli stabilizátora a $G_2^{\mathbb{C}}$ komplex csoport valós nemkompakt alakja³⁷: \tilde{G}_2 . Az állapot geometriai reprezentánsául továbbra is a 3.1. ábrán látható Fano sík szolgál, most azonban a nyílak irányítását a (3.149) állapotban szereplő előjeleknek megfelelően meg kell változtatnunk. Amennyiben a bázisvektorokat egy kompozíciós algebra elemeinek tekintjük akkor az új előjelkombinációk most a split októniók szorzótábláját adják.

³⁷ \tilde{G}_2 a split-októniók automorfizmus csoportja. A split kompozíciós algebrakról lásd még a (2.4) fejezet lábjegyzetét.

Vegyük észre, hogy ha a (3.95) és a (3.97) egyenleteknek megfelelő új lineáris kombinációkat vezetünk be

$$F^{1,2,3} = e^{1,2,3} + e^{4,5,6}, \quad F^{\bar{1},\bar{2},\bar{3}} = e^{1,2,3} - e^{4,5,6}, \quad F_7 = e^7, \quad (3.150)$$

$$E^{1,2,3} = e^{1,2,3} + ie^{4,5,6}, \quad E^{\bar{1},\bar{2},\bar{3}} = e^{1,2,3} - ie^{4,5,6}, \quad E_7 = ie^7, \quad (3.151)$$

akkor a fenti állapotok alakja

$$\mathcal{P}_- = \frac{1}{2}(E^{123} + E^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} + (E^{1\bar{1}} + E^{2\bar{2}} + E^{3\bar{3}}) \wedge E^7), \quad (3.152)$$

$$\mathcal{P}_+ = \frac{1}{2}(F^{123} + F^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} + (F^{1\bar{1}} + F^{2\bar{2}} + F^{3\bar{3}}) \wedge F^7). \quad (3.153)$$

Innen láthatóan mindkét állapot komplex SLOCC ekvivalens a 3.1. táblázat X. osztályának reprezentánsával azonban a (3.151)-ben szereplő képzetes egység jelenléte miatt \mathcal{P}_- már nem valós SLOCC ekvivalens ezzel a reprezentánssal.

Legyen most

$$G_{IJ} \equiv (\mathcal{J}(\mathcal{P}))^{-1/3} \mathcal{B}_{IJ} \quad (3.154)$$

ahol a szükséges definíciókat illetően lásd a (3.127) és a (3.112) formulákat. Figyeljük meg, hogy G_{IJ} egy olyan szimmetrikus mátrix mely SLOCC transzformációk során determináns faktor fel-szedése nélkül, közönséges másodrendű tenzorhoz hasonlóan transzformálódik. Ez a viselkedés teljesen hasonló a (3.76)-ben bevezetett duális állapot viselkedéséhez. Mivel most $V = \mathbb{R}^7$ a G_{IJ} mátrixot felfoghatjuk úgy mint egy szimmetrikus bilineáris forma (metrika) mátrixát. Hangsúlyozzuk, hogy ezt a V téren megadott extra struktúrát olyan \mathcal{P} háromfermion állapot definiálja mely a stabil pályának megfelelő GHZ szerű SLOCC osztályba tartozik. Ekkor a metrika a (3.128) képletnek megfelelően nem degenerált. A metrika szerkezete tovább egyszerűsödik ha kikötjük, hogy a háromfermion állapotot reprezentáló \mathcal{P} háromformára teljesül a (3.56) összefüggés. Ekkor a G_{IJ} mátrixot és a G^{IJ} inverzét a (3.121) és a (3.122) kovariánsok speciális szerkezetét felhasználva az alábbi alakba írhatjuk

$$\mathbf{G}_{\mathcal{P}} = \mathcal{J}^{-1/3}(\mathcal{P}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega \mathbf{K} & 0 \\ 0 & -\text{Pf}(\omega) \end{pmatrix} \quad (3.155)$$

$$\mathbf{G}_{\mathcal{P}}^{-1} = \mathcal{J}^{-2/3}(\mathcal{P}) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mathbf{K}\tilde{\omega} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\mathcal{D}(\mathcal{P}) \end{pmatrix} \quad (3.156)$$

ahol a felhasznált definíciókat illetően lásd a (3.117), (3.65), (3.67), (3.123), (3.124) és (3.125) összefüggéseket. Könnyen ellenőrizhető, hogy a (3.147) és (3.149) állapotokra $G_{\mathcal{P}_-}$ és $G_{\mathcal{P}_+}$ a 7×7 -es egységmátrix illetve a $\{1, 1, 1, -1, -1, -1, -1\}$ diagonális mátrix.

A (3.154) metrika segítségével minden GHZ szerű valós³⁸ háromfermion állapothoz definiálhatunk egy duális négyfermion állapotot. Ezt az állapotot a megfelelő \mathcal{P} háromforma G -metrikára vonatkozó Hodge duáltja adja

$$*\mathcal{P} = \frac{1}{4!} * \mathcal{P}_{IJKL} e^{IJKL}, \quad *\mathcal{P}_{IJKL} = \frac{1}{3!} \sqrt{|G|} \varepsilon_{IJKLABC} \mathcal{P}^{ABC}. \quad (3.157)$$

Hangsúlyozzuk hogy a Hodge duált fenti definíciója a \mathcal{P} forma aktuális alakjától függ ezért helyesebb lenne a $*$ jelölés helyett a $*_{\mathcal{P}}$ jelölést használni. Emlékeztetünk arra is, hogy a \mathcal{P}^{IJK} komponenseit a \mathcal{P}_{IJK} komponensekből a (3.156) inverz metrika segítségével, indexfelhúzással kapjuk. Figyeljük meg, hogy a duális állapot nemlineáris módon függ az eredeti állapottól.

A (3.147) és (3.149) inekvivalens állapotokra kapjuk

$$\mathcal{D}(P_{GHZ_-}) = -4, \quad \text{Pf}(\omega_0) = -1, \quad \mathcal{J}(\mathcal{P}_-) = 1 \quad (3.158)$$

³⁸Természetesen az alábbi definíciókat formálisan a komplex esetben is használhatjuk. Ekkor azonban a G_{IJ} mátrix komplex lesz.

$$\mathcal{D}(P_{GHZ_+}) = 4, \quad \text{Pf}(-\omega_0) = 1, \quad \mathcal{J}(\mathcal{P}_+) = 1. \quad (3.159)$$

összhangban a (3.125) képlettel. Tekintettel arra, hogy mindkét esetben a metrikák diagonális mátrixok kapjuk hogy

$$* \mathcal{P}_- = (e^{456} - e^{234} + e^{135} - e^{126}) \wedge e^7 - \frac{1}{2}(e^{14} + e^{25} + e^{36}) \wedge (e^{14} + e^{25} + e^{36}) \quad (3.160)$$

$$* \mathcal{P}_+ = (e^{456} + e^{234} - e^{135} + e^{126}) \wedge e^7 + \frac{1}{2}(e^{14} + e^{25} + e^{36}) \wedge (e^{14} + e^{25} + e^{36}) \quad (3.161)$$

A (3.72) és a (3.148) felhasználásával és a

$$\hat{P}_\pm \equiv \mp \frac{\tilde{P}_\pm}{\sqrt{|\mathcal{D}(P_\pm)|}} \quad (3.162)$$

valós duális állapotok bevezetésével³⁹ a fentiek helyett írható, hogy

$$* \mathcal{P}_\pm = \hat{P}_\pm \wedge e^7 \pm \frac{1}{2} \omega_0 \wedge \omega_0 \quad (3.163)$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a hét egyrészezske állapotra definiált dualitás a hat egyrészezske állapotra definiált dualitással hozható kapcsolatba.

Hasznos a fenti speciális esetekben megfigyelt szabályosságokat általánosabban a $P \wedge \omega = 0$ eseben is felírni. Ekkor (3.156) felhasználásával kapjuk, hogy

$$* \mathcal{P} = \mathcal{J}^{1/3}(\mathcal{P}) \left(\frac{\omega \wedge \omega}{2 \text{Pf}(\omega)} - \frac{2\tilde{P} \wedge e^7}{\mathcal{D}(P)} \right). \quad (3.164)$$

Ezt a kifejezést ék szorozva $\mathcal{P} = P + \omega \wedge e^7$ -vel kapjuk, hogy

$$\frac{1}{7} \mathcal{P} \wedge * \mathcal{P} = \mathcal{J}^{1/3}(\mathcal{P}) \mathbb{E} \wedge e^7 \quad (3.165)$$

ahol \mathbb{E} a (3.102)-ban definiált hatdimenziós térfogatelem. Ezt az összefüggést érdemes összevetni a hat egyrészezske állapotos esetre kapott (3.104) összefüggéssel. Az összefüggések közös vonása az, hogy mindkettőben egy az eredeti állapottól függő duális állapottal történő ék szorzás a megfelelő térfogatelemmel szorozott alapvető összefonódottsági mértéket adja.

Az alfejezet lezárásaként egészítsük ki az alapvető fontosságú (3.165) és (3.104) összefüggéseinket az utóbbi valós esetben érvényes

$$\frac{1}{2} P \wedge \hat{P} = \sqrt{|\mathcal{D}(P)|} \mathbb{E} \quad (3.166)$$

alakjával és a

$$\frac{1}{6} \omega \wedge \omega \wedge \omega = \text{Pf}(\omega) \mathbb{E} \quad (3.167)$$

összefüggéssel. A 3.1.1. fejezetben elmondottak szerint az ω két formát tekinthetjük egy hat egyrészezske állapottal rendelkező kétfermionos rendszer matematikai reprezentációjának. Belátható, hogy a (3.167) jobb oldalán megjelenő $\text{Pf}(\omega)$ relatív invariáns egy összefonódottsági mértéket ad⁴⁰. Továbbá, a SLOCC osztályokat a különböző Slater rangú állapotok adják⁴¹. A maximálisan összefonódott kétfermion állapotoknak tehát a maximális (három) Slater rangú, *nem degenerált* két formák felelnek meg. Ezekre $\text{Pf}(\omega) \neq 0$.

³⁹A valós esetben bevezetett (3.162) duális állapot definíciója a két különböző valós SLOCC osztályra egy előjelben különbözik. Ez a definíció a komplex esetre korábban bevezetett (3.76) definícióval csak a P_- állapotra konzisztens.

⁴⁰Valóban, a négy egyrészezske állapotos kétfermion rendszerre megjelenő (3.21) mérték is egy Pfaffian kombináció.

⁴¹A Slater rang definícióját illetően lásd a (3.6) kanonikus alakot.

Tekintsünk most egy valós kétfermionos és egy valós háromfermionos rendszert hat egyrészecske állapottal, azaz legyen adott egy $(\omega, P) \in \wedge^2 \mathbb{R}^6 \times \wedge^3 \mathbb{R}^6$ pár. Tegyük fel hogy a megfelelő állapotok egyike sem degenerált azaz $\text{Pf}(\omega) \neq 0$ és $\mathcal{D}(P) \neq 0$. Tegyük fel azt is, hogy a két állapot kompatibilis egymással azaz $\omega \wedge P = 0$. Ha a két rendszer számára egy hetedik egyrészecske állapot is betölthető akkor a két rendszert kombinálhatjuk egy $\mathcal{P} = P + \omega \wedge e^7$ hét egyrészecske állapotos rendszerré. Érdekes megvizsgálni, hogy az eredeti rendszer $(\text{Pf}(\omega), \mathcal{D}(P))$ összefonódottsági mértékei és a keletkező rendszer $\mathcal{J}(\mathcal{P})$ összefonódottsági mértéke mikor áll minnél egyszerűbb kapcsolatban egymással. A (3.125) képletből látható, hogy a

$$\pm 2 \text{Pf}(\omega) = \sqrt{|\mathcal{D}(P)|} \quad (3.168)$$

választás esetén

$$\mathcal{J}^{1/3}(\mathcal{P}) = \pm 2 \text{Pf}(\omega) = \sqrt{|\mathcal{D}(P)|}. \quad (3.169)$$

A fenti választást az is indokolja, hogy ekkor a (3.164) duális állapot az elegáns

$$* \mathcal{P} = \hat{P} \wedge e^7 \pm \frac{1}{2} \omega \wedge \omega \quad (3.170)$$

alakra hozható. Kapott eredményünket a (3.163) állapotokkal összevetve látjuk, hogy a két valós osztályt reprezentáló \mathcal{P}_{\pm} állapotok a fenti feltételeknek eleget tesznek.

3.5. Összefonódottság a fermionikus Fock térben

Az előző fejezetek eredményeinek ismeretében felmerül a kérdés lehetséges-e a SLOCC-klasszifikáció olyan általánosítását megadni, mely fermionok keltésére és eltüntetésére is lehetőséget ad. Kiderül, hogy matematikai szempontból természetes módon adódik egy ilyen általánosítás. Az általánosítás részleteit lásd a [SL14c, 11] publikációkban illetve a [Sár16] PhD dolgozatban. Az alábbiakban csupán az általános konstrukciót ismertetjük, majd a FLYQM szempontjából érdekes hat dimenziós speciális esetet tárgyaljuk. Tárgyalásunk alapja a spinorok Élie Cartan [Car38], Claude Chevalley [Che54] valamint Richard Brauer és Hermann Weyl [BW35] nevével fémjelzett matematikai elmélete.

3.5.1. Általánosított SLOCC transzformációk [SL14c]. Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy változó részecskeszám esetén a fermionikus SLOCC transzformációk csoportjának természetes általánosítása az úgynevezett páros Clifford csoport.

Legyen V egy N dimenziós komplex vektortér, V^* a duális tér, $\{e_i\}$ és $\{e^i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ a megfelelő bázisvektorok. Legyen $\mathcal{V} = V \oplus V^*$ az ezekből kapható $2N$ dimenziós komplex vektortér melynek tetszőleges elemét az $x = v + \alpha = v^i e_i + \alpha_j e^j$ alakba írjuk. Legyen továbbá \mathcal{V} -n adott a $\mathcal{Q} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ nemdegenerált kvadratikusság forma ahol

$$\mathcal{Q}(x) = \langle \alpha, v \rangle = \alpha^i v_i \quad (3.171)$$

és a formák és vektorok közötti párosításra továbbra is a (3.32) kapcsán használt jelölést használjuk. Ekkor a \mathcal{Q} -hoz asszociált $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ szimmetrikus bilineáris forma⁴² az alábbi alakú

$$(v + \alpha, v' + \alpha') = \langle \alpha, v' \rangle + \langle \alpha', v \rangle, \quad v, v' \in V, \quad \alpha, \alpha' \in V^*. \quad (3.172)$$

Nyilván

$$(e_i, e_j) = (e^i, e^j) = 0, \quad (e^i, e_j) = (e_j, e^i) = \delta_j^i. \quad (3.173)$$

Szükségünk lesz még egy másik $(\cdot, \cdot)_\circ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ bilineáris formára is melyre

$$(v + \alpha, v' + \alpha')_\circ \equiv \langle \alpha', v \rangle = \alpha'^i v_i. \quad (3.174)$$

⁴² $(x, y) \equiv \mathcal{Q}(x + y) - \mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(y)$

Figyeljük meg, hogy $(x, x)_\circ = \mathcal{Q}(x)$ és

$$(e_i, e^j)_\circ = \delta_i^j, \quad (e^i, e_j)_\circ = 0, \quad (e^i, e^j)_\circ = 0, \quad (e_i, e_j)_\circ = 0. \quad (3.175)$$

Definiáljuk a \mathcal{Q} -ra vonatkozó $O(\mathcal{Q}, \mathcal{V})$ ortogonális csoportot mint azon $g \in GL(\mathcal{V})$ elemek halmazát melyre $\mathcal{Q}(gx) = \mathcal{Q}(x)$. Legyen továbbá $SO(\mathcal{Q}, \mathcal{V}) = O(\mathcal{Q}, \mathcal{V}) \cap SL(\mathcal{V})$ a \mathcal{Q} -ra vonatkozó speciális ortogonális csoport. Ezen csoport Lie algebráját az alábbi módon jellemezhetjük

$$\mathfrak{so}(\mathcal{V}) = \{S \in \text{End}(\mathcal{V}) \mid (Sx, y) + (x, Sy) = 0, \quad x, y \in \mathcal{V}\}. \quad (3.176)$$

A fenti Lie algebra egy lehetséges parametrizációja az alábbi

$$S = \begin{pmatrix} A & C \\ B & -A^* \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(\mathcal{V}) \quad (3.177)$$

Ahol

$$A \in \text{End}(V), \quad A = A_j^i e^j \otimes e_i, \quad (3.178)$$

$$B \in \wedge^2 V^* : V \rightarrow V^*, \quad B = \frac{1}{2} B_{ij} e^i \wedge e^j, \quad (3.179)$$

$$C \in \wedge^2 V : V^* \rightarrow V, \quad C = \frac{1}{2} C^{ij} e_i \wedge e_j. \quad (3.180)$$

Ez azt mutatja, hogy $\mathfrak{so}(V \oplus V^*) = \wedge^2(V \oplus V^*) = \text{End}(V) \oplus \wedge^2 V^* \oplus \wedge^2 V$.

Definiáljuk most a $\text{Cliff}(\mathcal{Q})$ Clifford algebrát azáltal, hogy a \mathcal{V} téren alapuló $T(\mathcal{V})$ tenzor-algebrát lefaktorizáljuk azon kétoldali $I_{\mathcal{Q}}$ ideállal melyet az

$$\{x \otimes x = \mathcal{Q}(x)\mathbf{1}, \quad \forall x \in \mathcal{V}\} \quad (3.181)$$

részhalmoz generál. Ezekkel a jelölésekkel $\text{Cliff}(\mathcal{Q}) = T(\mathcal{V})/I_{\mathcal{Q}}$. Jelöljük továbbá $T^+(\mathcal{V})$ -vel a páros rendű tenzorok alkotta részalgebrát. Ekkor a $\text{Cliff}^+(\mathcal{Q}) = T^+(\mathcal{V})/I_{\mathcal{Q}}$ faktoralgebrát páros Clifford algebrának nevezzük. A definíciók alapján látható, hogy a (3.181)-ben szereplő kifejezés polarizációjával kapott $x \otimes y + y \otimes x = (x, y)\mathbf{1}$ reláció a faktoralgebrában a bázisvektorok szorzására a megszokott

$$e_i^2 = (e^i)^2 = 0, \quad e^i e_j + e_j e^i = \delta_j^i, \quad e_i e_j + e_j e_i = e^i e^j + e^j e^i = 0 \quad (3.182)$$

fermionikus antikommutációs relációkra emlékeztető összefüggésekre vezet⁴³.

A Clifford algebra

$$\Gamma(\mathcal{Q}) = \{s \in \text{Cliff}(\mathcal{Q}) \mid \exists s^{-1}, \quad s\mathcal{V}s^{-1} \subset \mathcal{V}\} \quad (3.183)$$

alakú elemeinek halmaza a Clifford csoportot, $\Gamma^+(\mathcal{Q}) = \Gamma(\mathcal{Q}) \cap \text{Cliff}^+(\mathcal{Q})$ pedig a páros Clifford csoportot alkotja. Például $s = 1 + \lambda e_i e^j$ ahol $i \neq j$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ eleme a páros Clifford csoportnak, hiszen $s^{-1} = 1 + \lambda e^j e_i$ és $k \neq j$, $l \neq i$ esetén

$$s e_k s^{-1} = e_k, \quad s e_j s^{-1} = e_j + \lambda e_i, \quad s e^l s^{-1} = e_l, \quad s e^i s^{-1} = e^i - \lambda e^j. \quad (3.184)$$

Tekintsük $T(\mathcal{V})$ -n a $(\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_m)^T \equiv \nu_m \otimes \dots \otimes \nu_1$ anti-automorfizmust. Mivel $(I_{\mathcal{Q}})^T \subset I_{\mathcal{Q}}$ ezért a T -t a Clifford algebrán is definiálhatjuk. Például $s = e^1 e^2 \dots e^m$ esetén

$$(e^1 e^2 \dots e^m)^T = e^m \dots e^2 e^1 = (-1)^{m(m-1)/2} e^1 e^2 \dots e^m. \quad (3.185)$$

Mivel T változatlanul hagyja \mathcal{V} tetszőleges elemét ezért

$$s \nu s^{-1} = (s \nu s^{-1})^T = (s^{-1})^T \nu^T s^T = (s^{-1})^T \nu s^T \Rightarrow s^T s \nu = \nu s^T s. \quad (3.186)$$

Tehát $s^T s$ a Clifford algebra centrumában van. Mivel \mathcal{V} páros dimenziós ezért a centrum \mathbb{C} , azonban s a Clifford csoportnak is eleme tehát s és s^T mindegyike invertálható. Végeredményben tehát $s^T s$ egy nemzérus komplex szám azaz $s^T s \in \mathbb{C}^\times$.

⁴³A fermionikus kommutációs relációk és a Clifford algebrák közötti kapcsolatra elsőként Brauer és Weyl mutattak rá 1935-ös dolgozatukban [BW35].

Definiáljuk most a $\text{Spin}(\mathcal{Q})$ spinor csoportot

$$\text{Spin}(\mathcal{Q}) = \{s \in \Gamma^+(\mathcal{Q}) \mid s^T s = 1\}. \quad (3.187)$$

Figyeljük meg, hogy a definíció a páros Clifford csoport elemeire vonatkozik. Például a (3.184)-ben tanulmányozott $s = 1 + \lambda e_i e^j$ a spinor csoport egy lehetséges eleme. A

$$\Gamma^+(\mathcal{Q}) = \mathbb{C}^\times \times \text{Spin}(\mathcal{Q}) \quad (3.188)$$

páros Clifford csoportot általánosított SLOCC (GSLOCC) csoportnak fogjuk hívni.

Mivel

$$\mathcal{Q}(s\nu s^{-1}) = (s\nu s^{-1})^2 = s\nu^2 s^{-1} = s\mathcal{Q}(\nu)s^{-1} = \mathcal{Q}(\nu) \quad (3.189)$$

ezért a spinor csoport \mathcal{V} -n történő hatása őrzi a kvadratikus formát. Tehát $s\nu s^{-1}$ egy olyan új ν' vektort ad mely az eredeti vektor $SO(\mathcal{Q})$ általi elforgatottja. A fenti eljárás a jól ismert $\text{Spin}(\mathcal{Q}) \rightarrow SO(\mathcal{Q})$ homomorfizmust adja melynek magja \mathbb{Z}_2 . $\text{Spin}(\mathcal{Q})$ egy féligegyszerű, összefüggő és egyszeresen összefüggő algebrai csoport⁴⁴.

Legyen $s = e^S \in \text{Spin}(\mathcal{Q})$ és $\mathfrak{s} = e^S \in SO(\mathcal{Q})$, ahol S és \mathcal{S} a megfelelő Lie algebrák elemei. Ezekkel a jelölésekkel

$$sxs^{-1} = \mathfrak{s}(x) \Rightarrow [S, x] = \mathcal{S}(x). \quad (3.190)$$

Ekkor egy tetszőleges $\mathcal{S} \in SO(\mathcal{Q})$ Lie algebra elem parametrizálására a (3.177) alakot felhasználva írható, hogy

$$[S, \begin{pmatrix} e^i \\ e_j \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} A^i_k & C^{il} \\ B_{jk} & -A^l_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^k \\ e_l \end{pmatrix}, \quad S \in \text{Spin}(\mathcal{Q}). \quad (3.191)$$

Innen megkapható a spinor ábrázolás infinitezimális alakja

$$S = -B - C + A - \frac{1}{2}\text{Tr}A \cdot 1 \quad (3.192)$$

ahol

$$A = A^i_j e^j e_i, \quad B = \frac{1}{2} B_{ij} e^i e^j, \quad C = \frac{1}{2} C^{ij} e_i e_j. \quad (3.193)$$

3.5.2. Fermionikus állapotok mint spinorok . Legyen $\{u_1, u_2, \dots, u_{2N}\}$ a \mathcal{V} vektortér egy bázisa. Mivel $\mathcal{V} = V \oplus V^*$ ezért egy lehetséges bázis a kanonikus

$$\{u_1, \dots, u_N\} \equiv \{e_1, \dots, e_N\}, \quad \{u_{N+1}, \dots, u_{2N}\} \equiv \{e^1, \dots, e^N\} \quad (3.194)$$

bázis. Tekintsük most a $\wedge^\bullet \mathcal{V} = \sum_{k=0}^{2N} \wedge^k \mathcal{V}$ Grassmann algebrát. Minden $x \in \mathcal{V}$ -re legyen $\mathcal{R}(x)$ a fenti Grassmann algebra alábbi alakú endomorfizmusa

$$\mathcal{R}(x)\varphi \equiv (L_x + \delta_x)\varphi, \quad \varphi \in \wedge^\bullet \mathcal{V} \quad (3.195)$$

ahol

$$\delta_x(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (x, u_i) u_1 \wedge \dots \wedge u_{i-1} \wedge u_{i+1} \wedge \dots \wedge u_k \quad (3.196)$$

és

$$L_x \varphi \equiv x \wedge \varphi. \quad (3.197)$$

Figyeljük meg, hogy (3.196)-ban a (3.174) bilineáris formát használtuk. Ekkor $\mathcal{R}(x)^2 \varphi = (L_x \delta_x + \delta_x L_x) \varphi = \mathcal{Q}(x) \varphi$ tehát $\mathcal{R}(x)$ a $\text{Cliff}(\mathcal{Q})$ Clifford algebra ábrázolásává terjeszthető ki.

Legyen most

$$\mathcal{M} \equiv \wedge^\bullet \mathcal{V} \wedge (e_1 \wedge \dots \wedge e_N) = \wedge^\bullet V^* \wedge (e_1 \wedge \dots \wedge e_N). \quad (3.198)$$

⁴⁴Ha V egy tetszőleges páros dimenziós komplex vektortér akkor a négydimenziós eset kizárása esetén a spinor csoport egy egyszerű csoport.

Ekkor a (3.175) összefüggések felhasználásával megmutatható, hogy \mathcal{M} az $\mathcal{R}(x)$ hatásra nézve a $\wedge^\bullet \mathcal{V}$ ábrázolási tér 2^N dimenziós invariáns altére. Nyilván amennyiben $\varphi \in \wedge^\bullet V^*$ a $\varphi \mapsto \varphi \wedge (e_1 \wedge \dots \wedge e_N) \in \mathcal{M}$ leképezés egy lineáris izomorfizmus melynek segítségével \mathcal{M} -et azonosíthatjuk $\wedge^\bullet V^*$ -val.

Tekintsük tehát most már a V^* külső algebráját

$$\wedge^\bullet V^* = \mathbb{C} \oplus V^* \oplus \wedge^2 V^* \oplus \dots \oplus \wedge^N V^*. \quad (3.199)$$

Ekkor a fenti azonosítás miatt az L_{e^i} és δ_{e_j} operátorok az \mathcal{M} altéren úgy hatnak⁴⁵ mint az $e^i \wedge$ és a (3.32)-ben bevezetett ι_{e_j} operátorok a $\wedge^\bullet V^*$ téren. A 3.2.1. fejezetből már tudjuk, hogy a (3.34) megfeleltetés során a $\wedge^\bullet V^*$ külső algebrán ható $e^i \wedge$ és ι_{e_j} operátorokat f^{i+} és f_j fermionikus keltő és eltüntető operátorokként interpretálhatjuk. Ezért kézenfekvőnek látszik az \mathcal{F} fermionikus Fock teret a (3.199) külső algebrával azonosítani. Ebben a képben a fermionikus Fock tér elemei spinorok, melyek a $\text{Spin}(\mathcal{Q})$ csoport megfelelő ábrázolása szerint transzformálódnak. Mivel a \mathcal{V} vektortér páros dimenziós ezért a $\text{Spin}(\mathcal{Q})$ csoport hatására nézve az \mathcal{F} ábrázolási tér további két invariáns altérre bontható

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ \oplus \mathcal{F}^-. \quad (3.200)$$

Itt \mathcal{F}^+ és \mathcal{F}^- a (3.199) Grassmann algebra páros illetve páratlan rendű formákat tartalmazó részének felel meg. Az ötlet jónak tűnik, hiszen így a fenti tereken ható $\Gamma^+(\mathcal{Q}) = \mathbb{C}^\times \times \text{Spin}(2N, \mathbb{C})$ GSLOCC transzformációk a szokásos SLOCC transzformációk természetes általánosítását adnák. Valóban, a spinor ábrázolás (3.193) infinitezimális alakjának felhasználásával megmutatható, hogy $B_{ij} = C^{ij} = 0$ esetén a $\Gamma^+(\mathcal{Q})$ GSLOCC csoportból a szokásos $GL(V)$ SLOCC csoportot kapjuk vissza⁴⁶.

A fenti ötletet azonban matematikailag kicsit precízebben kell megfogalmaznunk. Válasszuk ugyanis a fermionikus Fock vákuum $|0\rangle$ állapotának a külső algebra $\wedge^0 V^* = \mathbb{C}$ részét! Ekkor $B_{ij} = C^{ij} = 0$ esetén (3.193) és (3.34) miatt $s = e^S$ meghatározásához az $A = A^i_j f^{i+} f_j$ operátort kell exponencializálni. Legyen most $a = e^A \in GL(N, \mathbb{C})$. Ekkor mivel $A|0\rangle = 0$ ezért (3.192) miatt a vákuum transzformációs tulajdonsága a szokásos SLOCC transzformációk során

$$|0\rangle \mapsto s|0\rangle = (\text{Det } a)^{-1/2} |0\rangle. \quad (3.201)$$

Tekintsük most (3.190) és (3.192) alapján az \mathcal{F} fermionikus Fock tér egy tetszőleges bázisvektorának transzformációját

$$s f^{i_1+} \dots f^{i_m+} |0\rangle = s f^{i_1+} s^{-1} \dots s f^{i_m+} s^{-1} s |0\rangle = (\text{Det } a)^{-1/2} \mathfrak{s}(f^{i_1+}) \dots \mathfrak{s}(f^{i_m+}) |0\rangle \quad (3.202)$$

Amennyiben $B_{ij} = C^{ij} = 0$ akkor $\mathfrak{s}(f^{i+}) = a^i_j f^{j+}$ és

$$f^{i_1+} \dots f^{i_m+} |0\rangle \mapsto (\text{Det } a)^{-1/2} a^{i_1}_{j_1} f^{j_1+} \dots a^{i_m}_{j_m} f^{j_m+} |0\rangle \quad (3.203)$$

Innen láthatóan egy tetszőleges (3.29) alakú $|P\rangle$ m -fermion állapotra történő hatás esetén a szokásos (3.38) SLOCC transzformáció helyett egy olyan hatást kapunk melyben mindig megjelenik az $a = e^A$ SLOCC transzformáció determinánsának négyzetgyöke. Ezt a zavaró determinánssfaktort kiküszöbölhetjük ha a fermionikus Fock teret az alábbi módon definiáljuk

$$\mathcal{F} = \wedge^\bullet V^* \otimes (\wedge^N V)^{1/2}. \quad (3.204)$$

Nyilvánvaló, hogy amíg a szokásos SLOCC transzformációk őrzik a fermionszámot, addig a $B_{ij} = C^{ij} \neq 0$ -val jellemzett GSLOCC transzformációk már nem. Ha a (3.191) jobb oldalán az e^k és e_l vektorokat az f^{k+} illetve f_l operátor reprezentánsaikkal helyettesítjük azonnal látható, hogy a (3.188) GSLOCC csoport $\text{Spin}(2N, \mathbb{C})$ részcsoportha Bogoliubov transzformációkat reprezentál. Mivel a fermionikus keltő és eltüntető operátorokkal a (3.182) összefüggések a szokásos

⁴⁵az L_{e_i} és a δ_{e_j} operátorok az \mathcal{M} -en mint az azonosan zérus operátorok hatnak.

⁴⁶Ennek bizonyítását egy speciális esetben a (3.243) formulát követő bekezdésben találhatjuk.

antikommutációs relációk alakjába írhatók, ezért a Bogoliubov transzformációk őrzik ezeket a relációkat.

Foglaljuk össze a kapott eredményeket. Legyen V egy N dimenziós komplex vektortér, mely el van látva egy Hermitikus skalárszorzattal. V az egyrészecske állapotok Hilbert terének felel meg. Ekkor (3.204)-nek megfelelően az \mathcal{F} fermionikus Fock teret a "poliformák" $\wedge^\bullet V^* \otimes (\wedge^N V)^{1/2}$ terével azonosíthatjuk. Egy $|\varphi\rangle \in \mathcal{F}$ fermionikus állapotot egy poliforma reprezentál azaz

$$|\varphi\rangle = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \varphi_{i_1 \dots i_k}^{(k)} f^{i_1+} \dots f^{i_k+} |0\rangle \leftrightarrow \varphi = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \varphi_{i_1 \dots i_k}^{(k)} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \otimes \mathbb{E}^{1/2} \quad (3.205)$$

ahol $\mathbb{E} = e_1 \wedge \dots \wedge e_N$ a térfogatelem. A (3.205) megfeleltetés bal oldalán a szokásos fermionikus antikommutációs relációknak eleget tevő f^{j+} keltő és a f_i eltüntető operátorok, a jobb oldalának első faktorán pedig az $e^j \wedge$ és a (3.32)-ben definiált ι_{e_i} operátorok hatnak. Egy tetszőleges (3.188) GSLOCC transzformációt $\lambda s = \lambda e^S$ alakba írhatunk ahol $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ és S (3.192) kifejezésében az e^i és e_j vektorok helyére f^{i+} illetve f_j operátorok irandók. A megszokott (fermionszámot őrző) SLOCC transzformációk részcsoportja (3.192)-ből a $B = C = 0$ helyettesítéssel kapható.

Mivel a szokásos SLOCC transzformációk magukba foglalják a normát is őrző lokális unitér transzformációkat, felmerül a kérdés melyek lesznek a fenti fermionikus részecske számot már nem őrző képben az "általánosított lokális unitér" (GLU) transzformációk? Ahhoz, hogy unitér transzformációkról beszélhessünk kihasználjuk, hogy V -n adott egy Hermitikus belső szorzat. Ekkor írható hogy $f^+ = f^\dagger$ azaz a fermionikus keltő operátorok az eltüntető operátorok adjungáltjai. Ekkor egy u GLU transzformációtól megköveteljük, hogy az $u f u^{-1}$ transzformált eltüntető operátor maradjon továbbra is az adjungáltja az $u f^+ u^{-1}$ transzformált keltő operátornak. Ennek a feltételnek a következménye az lesz, hogy az $u = e^U$ -val kapcsolatos $U = -B - C + A - \frac{1}{2} \text{Tr } A$ kifejezésében szereplő A^i_j mátrix antihermitikus lesz, továbbá teljesülnie kell még a $(B^\dagger)_{ij} = -C^{ij}$ kényszernek is. A megengedhető $u = e^U$ Bogoliubov transzformációkra tehát teljesül az

$$\bar{u} = \eta u \eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.206)$$

valóssági feltétel. Itt felülhúzással a komplex konjugálást, η -val pedig a (3.171)-ben szereplő \mathcal{Q} kvadratikus forma mátrixát jelöltük. Egy megengedhető Bogoliubov transzformációra tehát $u \in SO(2N, \mathbb{C}) \cap SU(2N)$. A \mathcal{Q} kvadratikus forma η mátrixának diagonalizálásával megmutatható [SL14c], hogy a (3.206) valóssági feltételnek eleget tevő Bogoliubov transzformációk csoportja izomorf az $SO(2N, \mathbb{R})$ csoporttal. Ez a fizikai alkalmazásokból jólismert fermionikus Bogoliubov transzformációk csoportja. Lévén az A mátrix antihermitikus a GLU transzformációk a $B = C = 0$ speciális esetben magukba foglalják a szokásos LU transzformációk $U(N)$ részcsoportját is.

3.5.3. Szeparálható állapotok mint egyszerű spinorok [SL14c, 11]. Tekintsük a $|0\rangle$ Fock vákuum GSLOCC transzformációkkal szembeni transzformációs tulajdonságait. Legyen $\lambda s = \lambda e^S \in \mathbb{C}^\times \times \text{Spin}(2N, \mathbb{C})$ egy általánosított SLOCC transzformáció ahol most $S = -B - \beta + A - \text{Tr } A/2$ (3.193) definíciójában e^i és e_j helyett keltő és eltüntető operátorok szerepelnek. Mivel $A|0\rangle = C|0\rangle = 0$ és a (3.204)-nek megfelelő módon újradefiniált vákuum már nem a (3.201) módon transzformálódik ezért

$$|0\rangle \mapsto e^{-B}|0\rangle = \left(1 - B + \dots + (-1)^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{1}{\lfloor N/2 \rfloor!} B^{\lfloor N/2 \rfloor} \right) |0\rangle. \quad (3.207)$$

A $|0\rangle$ általánosított SLOCC pályája tehát $e^{-B}|0\rangle$ alakú elemekből áll, melyek az \mathcal{F} -beli lehetséges Bogoliubov vákuumokat adják. Közöséges SLOCC transzformációkra $B = 0$ ekkor a vákuum egy nemzérus komplex számszorzó erejéig egyértelmű s így a spinorok terében egy sugarat határoz meg.

Nyilván az f_i , $i = 1, 2, \dots, N$ operátorok eltüntetik $|0\rangle$ -t akkor és csak akkor ha az $sf_i s^{-1}$ operátorok eltüntetik $s|0\rangle$ -t. Az N darab f_i operátornak a $2N$ dimenziós \mathcal{V} vektortér azon N dimenziós V altere felel meg melyet az e_i vektorok feszítenek ki. Hasonlóan (3.190) miatt az $sf_i s^{-1} = \mathfrak{s}(f_i)$ operátoroknak egy az $e'_i \equiv \mathfrak{s}(e_i)$ vektorok által kifeszített B -transzformált N -dimenziós altér fog megfelelni. Mivel minden $x = x^i e_i \in V$ és $y = y^j e_j$ vektorra $(x, y) = 0$ ezért a \mathcal{V} -nek a $|0\rangle$ vákuum állapottal kapcsolatos V altere maximális teljesen izotróp altér⁴⁷. Hasonlóan az $e'_i \equiv \mathfrak{s}(e_i)$ vektorok által kifeszített altér is egy maximális teljesen izotróp altér. Innen látható, hogy bármely Bogoliubov vákuumhoz tartozik egy ilyen tulajdonságú altér.

Definíció szerint egy φ spinor *tiszta*, ha az

$$E_\varphi \equiv \{x \in \mathcal{V} \mid x\varphi = 0\} \quad (3.208)$$

annihilátor altér maximális teljesen izotróp altér. A definíció alapján tehát a Bogoliubov vákuumok tiszta spinorok. Könnyen látható, hogy rögzített fermionszám esetén az egyetlen Slater determinánssal rendelkező (szeparálható) állapotok is tiszta spinorok. Valóban, ezek SLOCC transzformációkkal $f^{1+} \dots f^{k+}|0\rangle$ alakra hozhatók ($k \leq N$), így az $\{f^{1+}, \dots, f^{k+}, f_{k+1}, \dots, f_N\}$ operátorok lineáris kombinációi az ilyen állapotokat eltünteti. A $\{e^1, \dots, e^k, e_{k+1}, \dots, e_N\}$ vektorok egy maximális teljesen izotróp alteret feszítenek ki, ezért a fenti típusú spinorok is tiszták. Megmutatható [Che54, BT89], hogy bármely tiszta spinor felírható az alábbi alakban

$$|\varphi\rangle = \lambda e^B f^{1+} \dots f^{k+}|0\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}^\times, \quad B = \sum_{k+1 \leq i < j \leq N} B_{ij} f^{i+} f^{j+}. \quad (3.209)$$

Ez azt jelenti, hogy bármely tiszta spinor által meghatározott sugár előáll a szokásos SLOCC szeparálható állapotok B -transzformáltjaként. Ismeretes [Che54], hogy az adott paritással⁴⁸ rendelkező tiszta spinorok egyetlen általánosított SLOCC pályát alkotnak. A fenti tulajdonságok miatt a tiszta spinorokat célszerű a GSLOCC klasszifikáció szeparálható állapotainak tekinteni.

A tiszta spinorok a 2.7 fejezetben már tanulmányozott Grassmann sokaságokkal szoros kapcsolatban állnak. Tekintsük a $2N$ dimenziós \mathcal{V} vektortér N dimenziós altereinek halmazát. Ezek a $Gr(2N, N)$ Grassmann sokaságot alkotják. Legyen $\mathcal{Q}(2N, N)$ a Grassmann sokaság azon részsokasága mely \mathcal{V} teljesen izotróp N -dimenziós altereinek halmazából áll. Ekkor megmutatható, hogy ennek az úgynevezett kvadratikus Grassmann sokaságnak a pontjai és a tiszta spinorok sugarai között egy-egyértelmű megfelelés áll fenn. A komplex $N(N-1)/2$ dimenziós $\mathcal{Q}(2N, N)$ sokaság két összefüggő komponensből áll melyek a (3.200) dekompozíciónak megfelelően a pozitív és negatív kiralitású tiszta spinorokkal kapcsolatosak. Az $O(2N, \mathbb{C})$ és $SO(2N, \mathbb{C})$ csoportok tranzitív módon hatnak a tiszta spinorok, illetve a rögzített kiralitással rendelkező tiszta spinorok sugarain [TT94].

$N \leq 3$ -ra minden spinor tiszta [Che54]. $N > 3$ esetén léteznek nem tiszta spinorok is. Mivel a tiszta spinorok a GSLOCC klasszifikáció szeparálható állapotai, ezért a nem tiszta spinorokat a továbbiakban *összefonódott* spinoroknak fogjuk nevezni. A GSLOCC összefonódottsági osztályok klasszifikációjának problémája ekvivalens a matematikai irodalomból jólismert spinorok klasszifikációjának problémájával. Ez a probléma a spinorok terének inekvivalens GSLOCC pályákra történő felbontásán túl a megfelelő összefonódottsági osztályok reprezentánsainak izotrópia csoportjának meghatározását is jelenti. A fenti probléma megoldása $N \leq 7$ esetén ismert [Igu70, Pop78], $N > 7$ -re keveset tudunk. FLYQM-vel kapcsolatosan nekünk csak az $N = 6$ -os esetre lesz szükségünk. Ez az eset a matematikai irodalomban Igusa munkássága nyomán jól ismert [Igu70].

⁴⁷Egy \mathcal{V} -beli altér teljesen izotróp, ha minden $u, v \in \mathcal{V}$ esetén $(u, v) = 0$. A \mathcal{V} -n adott \mathcal{Q} kvadratikus forma szerkezetéből adódóan az ilyen altér maximális ha dimenziója N

⁴⁸Vagy \mathcal{F}^+ -ba vagy \mathcal{F}^- -ba tartozó.

3.5.4. Fermionikus invariánsok [SL14c, 11]. Az alapvető invariánsok megkonstruálásához a spinorok terén először egy bilineáris formát definiálunk. Tudjuk, hogy (3.204) alapján a fermionikus Fock teret a $(\wedge^N V)^{1/2}$ faktoral kombinált $\wedge^\bullet V^*$ Grassmann algebra adja. A Fock tér elemei tehát (3.205) alakú poliformák. A fenti Grassmann algebrán természetes módon hat a (3.185) $(\cdot)^T$ antiautomorfizmus. Tekintsünk most két $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ fermionikus állapotot. Ekkor $\psi^T \wedge \varphi \in \wedge^\bullet V^* \otimes \wedge^N V$. A kanonikus bázisban eredményünk tehát egy $\mathbb{E} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_N \in \wedge^N V$ értékű poliforma. Amennyiben a kapott poliformának csak az $\mathbb{E}^* = e^1 \wedge \cdots \wedge e^N$ -vel arányos részét tartjuk meg és kihasználjuk, hogy $\langle \mathbb{E}^*, \mathbb{E} \rangle = 1$ egy komplex számot kapunk. Jelöljük ezt a komplex számot $(\psi^T \wedge \varphi)_N$ -vel, ekkor definíció szerint a

$$(\cdot|\cdot) : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\psi, \varphi) \mapsto (\psi|\varphi) \equiv (\psi^T \wedge \varphi)_N \in \mathbb{C} \quad (3.210)$$

leképezés egy bilineáris formát ad. A fenti bilineáris formát eredetileg Chevalley definiálta [Che54], a forma fenti alakja megegyezik a poliformákon megadható úgynevezett Mukai-féle párosítással [Muk84]. Spin($2N, \mathbb{C}$) transzformációk során bilineáris formánk egy előjel erejéig invariáns [Che54]

$$(s\psi|s\varphi) = \pm(\psi|\varphi), \quad s \in \text{Spin}(2N, \mathbb{C}). \quad (3.211)$$

A bilineáris forma tehát az egységelemmel összefüggő Spin₀($2N, \mathbb{C}$) transzformációkra nézve invariáns⁴⁹. Speciálisan $(e^B \psi | e^B \varphi) = (\psi|\varphi)$.

Szükségünk lesz arra, hogy a fenti bilineáris formát a pozitív illetve negatív kiralitású alterekre (Weyl spinorok) leszűkítsük. Ezek az alterek páros (\mathcal{F}^+) illetve páratlan (\mathcal{F}^-) számú fermionot tartalmazó rendszereket reprezentálnak. Belátható, hogy amennyiben V páros dimenziós a bilineáris forma \mathcal{F}^\pm -en $N = 4k$ esetén szimmetrikus, $N = 4k + 2$ esetén pedig antiszimmetrikus⁵⁰. Ezekben az esetekben a forma explicit alakja

$$(\psi|\varphi)\mathbb{E}^* = \sum_m (-1)^m \psi^{(2m)} \wedge \varphi^{(N-2m)}, \quad \psi, \varphi \in \mathcal{F}^+ \quad (3.212)$$

$$(\psi|\varphi)\mathbb{E}^* = \sum_m (-1)^m \psi^{(2m+1)} \wedge \varphi^{(N-2m-1)}, \quad \psi, \varphi \in \mathcal{F}^- \quad (3.213)$$

ahol a $\psi^{(2m)}$ stb. jelölés arra utal, hogy a (3.205) alakú kifejtésben csak a $2m$ -formának megfelelő részt kell megtartani. Érdeemes megjegyezni, hogy $(\psi|\psi) \neq 0$ akkor és csak akkor ha $N = 4k$.

$N = 4k + 2$ esetén a bilineáris forma segítségével a fermionikus Fock tér egy tetszőleges eleméhez hozzárendelhetjük az $\mathfrak{so}(2N, \mathbb{C})$ Lie algebra egy elemét. A konstrukció az alábbi. Defináljuk a

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{F} &\rightarrow \mathfrak{so}(2N, \mathbb{C}), \\ \varphi &\mapsto \mathcal{K}_\varphi \end{aligned} \quad (3.214)$$

momentum leképezést az alábbi módon

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}, \mathcal{K}_\varphi) = \frac{1}{2}(\mathcal{S}\varphi|\varphi), \quad \mathcal{S} \in \mathfrak{so}(2N, \mathbb{C}), \quad \mathcal{S} \in \mathfrak{spin}(2N, \mathbb{C}) \quad (3.215)$$

ahol \mathcal{B} a Killing forma [FH91]. Ismeretes, hogy $\mathfrak{so}(2N, \mathbb{C})$ esetén

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}, \mathcal{K}_\varphi) = 2(N-1)\text{Tr}(\mathcal{S}\mathcal{K}_\varphi). \quad (3.216)$$

Vegyük észre, hogy a momentum leképezés létezéséhez az $N = 4k + 2$ feltétel szükséges hiszen $N = 4k$ esetén a bilineáris forma szimmetrikus ezért μ azonosan zérus. $N = 4k + 2$ esetén azonban a bilineáris forma antiszimmetrikus így az a Weyl spinorok terén egy nemdegenerált szimplektikus formát definiál. Az \mathcal{F}^\pm tereket ekkor olyan klasszikus mechanikai rendszerek fázistereiként is

⁴⁹A Mukai párosítás és a fermionikus invariánsok összefonódottság elméleti tárgyalását lásd még a [Sár16] és [11] dolgozatokban.

⁵⁰Páratlan N esetén a bilineáris forma rögzített kiralitású alterekre történő leszűkítése az azonosan zérus formát adja.

felfoghatjuk melyeken a GSLOCC transzformációk csoportja hat. Az ilyen klasszikus mechanikai rendszerekre a momentum leképezés standard konstrukcióját alkalmazhatjuk [AM08], ez pedig a (3.215) definícióra vezet. Hasonló konstrukcióval már találkoztunk a 3.3.5 fejezet végén ahol kiderült, hogy a hat valós egyrészecske állapottal rendelkező háromfermionos rendszerekre a (3.65) $P \mapsto K_P$ hozzárendelés ugyancsak egy momentum leképezést definiál. Hamarosan látni fogjuk, hogy ez a leképezés a $\varphi \mapsto \mathcal{K}_\varphi$ leképezés speciális esete.

Könnyen belátható, hogy a $\varphi \mapsto S\varphi$, $S \in \text{Spin}(2N, \mathbb{C})$ általánosított SLOCC transzformáció során $\mathcal{K}_{S\varphi} = S\mathcal{K}_\varphi S^{-1}$. Mivel \mathcal{K}_φ adjungált módon transzformálódik ezért az

$$\mathcal{I}_{2k}(\varphi) \equiv [8(N-1)]^k \text{Tr}(\mathcal{K}_\varphi^k) \quad (3.217)$$

homogén $2k$ fokú polinomok általánosított SLOCC invariánsok.

A fenti invariánsok explicit alakjának meghatározásához megadjuk momentum leképezés explicit alakját [SL14c]

$$\mathcal{K}_\varphi = \frac{1}{8(N-1)} \begin{pmatrix} [A_\varphi]_k^{i+} & [\beta_\varphi]^{il} \\ [B_\varphi]_{jk} & -[A_\varphi]_j^l \end{pmatrix} \quad (3.218)$$

ahol

$$[A_\varphi]_k^{i+} = (f^{i+} f_k \varphi | \varphi), \quad [B_\varphi]_{jk} = (f_j f_k \varphi | \varphi), \quad [\beta_\varphi]^{il} = (f^{i+} f^{l+} \varphi | \varphi). \quad (3.219)$$

3.5.5. Négy módus [SL14c, 12]. A fenti formalizmus illusztrálására a következő az alfejezetekben a későbbiekben felhasználásra kerülő $N = 4$ és az $N = 6$ esettel foglalkozunk.

Az $N = 4$ -es esetben ugyan a momentum leképezés nem használható azonban a (3.210) bilineáris forma nem tűnik el és így a spinorok klasszifikációjához felhasználható.

\mathcal{F}^+ esetén a fermionikus Fock tér páros számú fermiont tartalmazó $|\varphi\rangle$ állapotát egy pozitív kiralitású φ Weyl spinorral reprezentálhatjuk

$$\varphi = \left(\eta \mathbf{1} + \frac{1}{2} P_{ij} e^i \wedge e^j + \frac{1}{4!} \xi \epsilon_{ijkl} e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l \right) \otimes \mathbb{E}^{1/2} \quad (3.220)$$

Ekkor (3.212) alapján az alábbi kvadratikuss invariánst kapjuk

$$(\varphi | \varphi) = 2\eta\xi - 2\text{Pf}(P) \quad (3.221)$$

ahol $\text{Pf}(P) = \frac{1}{2^2 2!} \epsilon^{ijkl} P_{ij} P_{kl}$.

Mivel φ tiszta spinor akkor és csak akkor ha [Igu70] $(\varphi | \varphi) = 0$ ezért ekkor a megfelelő $|\varphi\rangle$ fermionikus állapot általánosított SLOCC értelemben szeparálható. Amennyiben $(\varphi | \varphi) \neq 0$ a fermionikus állapot összefonódott. Megmutatható [Igu70], hogy $N = 4$ esetén csak ez a két általánosított SLOCC osztály létezik. Amennyiben a (3.9)-vel reprezentált rögzített fermionszámú kétrészecskés alteret tekintjük, akkor $\eta = \xi = 0$ s így $(\varphi, \varphi) = -2\text{Pf}(P) = 0$ miatt a kétformákra jólismert (3.21) Plücker relációkat kapjuk.

Szeparálható állapotra egy lehetséges példa az $\eta = \xi = 1$, $P_{12} = P_{34} = -1$ választással definiált állapot. Könnyen látható, hogy a fenti együtthatók által adott φ spinor az $e^B \mathbf{1} \otimes \mathbb{E}^{1/2}$ alakba írható ahol $B = e^{12} + e^{34}$. A megfelelő Fock térbeli állapot tehát a $|0\rangle$ Fock vákuum (3.207) B-transzformáltja. Összefonódott állapotra az $\eta = \xi = 1$, vagy a $P_{12} = P_{34} = 1$ választás adhat példát. A spinorok klasszifikációja nyilván magába foglalja a szokásos SLOCC klasszifikációt.

Tudjuk, hogy a (3.45) leképezés segítségével a két qubit állapotteret beágyazhatjuk a fenti négy egyrészecske állapotos kétfermion állapottérbe [11]. Azt is tudjuk, hogy a beágyazás során a fermionikus SLOCC csoport természetes módon magába foglalja a két-qubit SLOCC csoport és a két elemű permutációs csoport féldirekt szorzatát. Azonnal látható az is, hogy ekkor a $(\varphi, \varphi) = -2\text{Pf}(P) = 0$ invariáns egy konstans faktortól eltekintve a két qubit konkurrencia (2.17) kifejezésére vezet.

Az $N = 4$ -es eset példája tehát szépen mutatja, hogy a fermionikus Fock téren alapuló általánosított SLOCC klasszifikáció hogyan foglalja magába a korábban már tárgyalt klasszifikációs sémákat.

3.5.6. Hat módus [SL14c]. Tekintsük először a páros kiralitású fermionokat, $|\varphi\rangle \in \mathcal{F}^+$. Ekkor a megfelelő φ spinort az alábbi alakba írjuk

$$\varphi = \left(\eta \mathbf{1} + \frac{1}{2!} y_{ij} e^{ij} + \frac{1}{2!4!} x^{ij} \epsilon_{ijklmn} e^{klmn} + \xi e^{123456} \right) \otimes \mathbb{E}^{1/2} \quad (3.222)$$

ahol $e^{i_1 \dots i_k} \equiv e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ továbbá x^{ij} és y_{ij} komplex 6×6 -os antiszimmetrikus mátrixok. A (3.219) momentum leképezés blokkjai

$$\begin{aligned} [A_\varphi]_j^i &= 2x^{ik} y_{kj} - \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(xy) + \eta \xi \right) \delta_j^i, \\ [B_\varphi]_{ij} &= \frac{1}{4} \epsilon_{ijklmn} x^{kl} x^{mn} - 2\xi y_{ij} \equiv 2(x^\sharp_{ij} - \xi y_{ij}), \\ [\beta_\varphi]^{ij} &= \frac{1}{4} \epsilon^{ijklmn} y_{kl} y_{mn} - 2\eta x^{ij} \equiv 2(y^\sharp{}^{ij} - \eta x^{ij}). \end{aligned} \quad (3.223)$$

Ezt felhasználva a (3.217) első nem eltűnő⁵¹ invariánsa $\mathcal{I}_4(\varphi)$

$$\frac{1}{12} \mathcal{I}_4(\varphi) = \left(\eta \xi + \frac{1}{2} \text{Tr}(xy) \right)^2 + 2\text{Tr}(x^\sharp y^\sharp) + 4\eta \text{Pf}(x) + 4\xi \text{Pf}(y) \quad (3.224)$$

ahol

$$\text{Pf}(x) = \frac{1}{233!} \epsilon_{ijklmn} x^{ij} x^{kl} x^{mn}, \quad (3.225)$$

és $4\text{Tr}(x^\sharp y^\sharp) = 2\text{Tr}(xyxy) - (\text{Tr}(xy))^2$ alakba is írható. A \mathcal{K}_φ momentum leképezés blokkjaiból (3.192) szerint képezhetjük a $K_\varphi = -B_\varphi - \beta_\varphi + A_\varphi - \text{Tr}A/2$ spinorábrázolás infinitezimális generátorát, ennek segítségével pedig a K_φ kovariánst.

A fermionikus állapotokat a GSLOCC csoport szerint öt ekvivalencia osztályba sorolhatjuk. A 3.2 táblázatban megadjuk az egyes osztályok reprezentánsait, és az osztályokat elkülönítő kovariánsokat és invariánsokat. Figyeljük meg, hogy a hat egyrészecke állapotos háromfermion állapotokhoz hasonlóan most is öt ekvivalencia osztályunk van.

Típus	$\mathcal{I}_4(\varphi)$	$K_\varphi \varphi$	K_φ	φ
I.	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$1 + e^{1234} + e^{3456} + e^{1256}$
II.	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$1 + e^{1234} + e^{3456}$
III.	0	0	$\neq 0$	$1 + e^{1234}$
IV.	0	0	0	1
V.	0	0	0	0

3.2. táblázat. Kanonikus alakok, invariánsok és kovariánsok hat dimenzióban. Az egyszerűség kedvéért az $\mathbb{E}^{1/2}$ faktort elhagytuk.

Tekintsük most a páratlan kiralitású esetet. Ekkor $|\psi\rangle \in \mathcal{F}^-$ és a megfelelő spinor alakja

$$\psi = \left(u_i e^i + \frac{1}{3!} P_{ijk} e^{ijk} + \frac{1}{5!} v^n \epsilon_{nijklm} e^{ijklm} \right) \otimes \mathbb{E}^{1/2} \quad (3.226)$$

⁵¹Azonnal látható, hogy $\mathcal{I}_4(\varphi) = 0$. Az összes többi invariáns pedig nem független. Ez annak köszönhető, hogy a hat módusú eset egy redukzív irreducibilis prehomogén vektorteret ad [Igu70] ezekre a terekre pedig egyetlen független GSLOCC relatív invariáns létezik.

ahol u^i és v^i hat komponensű vektorok a P_{ijk} trivektor pedig a szokásos (3.63) három formával kapcsolatos. A momentum leképezés mátrixa most a

$$\begin{aligned} [A_\psi]^i_j &= 2v^i u_j - (K_P)^i_j - v^k u_k \delta^i_j \\ [B_\psi]_{ij} &= -2P_{ijk} v^k \\ [\beta_\psi]^{ij} &= \frac{2}{3!} \varepsilon^{ijklmn} P_{klm} u_n \equiv -2P^{*ijk} u_k, \end{aligned} \quad (3.227)$$

alakot ölti ahol felhasználtuk a (3.65) definíciót. A kvartikus invariáns alakja most

$$\frac{1}{12} \mathcal{I}_4(\psi) = (v^i u_i)^2 + \frac{1}{3} u_i P^{*ikl} P_{klj} v^j + \mathcal{D}(P). \quad (3.228)$$

A fenti formulából látható, hogy háromfermion állapotok esetén a kvartikus invariáns $\mathcal{D}(P)$ (3.67) kifejezésébe megy át. A \mathcal{K}_ψ momentum leképezésnek megfelelő K_ψ operátor ekkor mint a megfelelő P állapotot ható $K_P = (K_P)^i_j f^{+j} f_i$ operátor jelenik meg. Nyilvánvaló az is, hogy ekkor a (3.72) képlet segítségével definiált duális \tilde{P} fermion állapot a $K_P P$ kifejezésének felel meg. A $K_P P$ duális állapot, a K_P momentum leképezés és a $\mathcal{D}(P)$ kvartikus invariáns segítségével pedig a SLOCC pályák a (3.78)-(3.81)-ből már ismert módon szétválaszthatók. A három qubit rendszerek (3.45) beágyazását felhasználva azonnal adódik az is, hogy a spinorok GSLOCC klasszifikációjából a három qubit SLOCC klasszifikációt is visszkapjuk.

3.5.7. Három-qubit rendszerek beágyazásai [SL14c, 11]. Az előzőekben láttuk, hogy mivel $GL(2, \mathbb{C})^{\otimes 3} \subset GL(6, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^\times \times Spin(12, \mathbb{C})$ a három-qubit SLOCC csoportot beágyazhatjuk a hat egyrészecske állapotot alapuló fermionikus GSLOCC csoportba. A beágyazó tér ekkor az \mathcal{F} Fock tér páratlan számú fermionot tartalmazó negatív kiralitású \mathcal{F}^- altere. Ebben a képen a három-qubit SLOCC csoport, a $GL(6, \mathbb{C})$ csoport (3.47) alakú részcsoporthaként áll elő. Az $(123\bar{1}23) \mapsto (1\bar{1}2\bar{2}3\bar{3})$ permutáció után ez a részcsoporthaként a

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & & \\ & \mathcal{A}_2 & \\ & & \mathcal{A}_3 \end{pmatrix} \in GL(6, \mathbb{C}) \quad (3.229)$$

alakban jelenik meg ahol $\mathcal{A}_i \in GL(2, \mathbb{C})$ $i = 1, 2, 3$. A fenti csoport elem (3.177)-ből a $B = C = 0$ helyettesítéssel kapott blokk diagonális mátrix 6×6 -os részének exponencializálásával kapható. Tehát a GSLOCC transzformációk B és C -transzformációkkal kapcsolatos részei a három-qubit SLOCC transzformációkban nem játszanak szerepet. Mivel a B és C -transzformációk a fermion-számot megváltoztatják, ez a megfigyelés összhangban van azzal, hogy a részecskeszám a SLOCC transzformációk szokásos értelmezésében megmarad.

Tekintsük azonban most az \mathcal{F} Fock tér páros számú fermionot tartalmazó pozitív kiralitású \mathcal{F}^+ alterét! Ekkor a $|\varphi\rangle \in \mathcal{F}$ állapotvektornak a (3.222) spinor felel meg. Tekintsük most (3.192) alapján az e^{-B} , e^{-C} és $e^{A - \text{Tr} A/2}$ transzformációk explicit hatását! Legyenek A, B, β a (3.191)-ben szereplő 6×6 -os mátrixok. Ekkor

$$e^{-B} : \begin{pmatrix} \eta \\ y_{ij} \\ x^{ij} \\ \xi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta \\ y_{ij} - \eta B_{ij} \\ x^{ij} + \eta B^{\sharp ij} - 2(B \times y)^{ij} \\ \xi - \eta \text{Pf}(B) + (B^{\sharp}, y) - (B, x) \end{pmatrix} \quad (3.230)$$

$$e^{-C} : \begin{pmatrix} \eta \\ y_{ij} \\ x^{ij} \\ \xi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta + \xi \text{Pf}(C) + (C^{\sharp}, x) + (\beta, y) \\ y_{ij} + \xi C_{ij}^{\sharp} + 2(C \times x)_{ij} \\ x^{ij} + \xi C^{ij} \\ \xi \end{pmatrix} \quad (3.231)$$

$$e^{A - \frac{1}{2} \text{Tr} A} : \begin{pmatrix} \eta \\ y_{ij} \\ x^{ij} \\ \xi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\det \mathcal{A})^{-\frac{1}{2}} \eta \\ (\det \mathcal{A})^{-\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{i'}_i \mathcal{A}^{j'}_j y_{i'j'} \\ (\det \mathcal{A})^{\frac{1}{2}} (\mathcal{A}^{-1})^i_{i'} (\mathcal{A}^{-1})^j_{j'} x^{i'j'} \\ (\det \mathcal{A})^{\frac{1}{2}} \xi \end{pmatrix} \quad (3.232)$$

ahol

$$(M \times N)^{ij} = \frac{1}{8} \epsilon^{ijklmn} M_{kl} N_{mn}, \quad M^\# \equiv M \times M \quad (3.233)$$

$$(M, N) \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr}(MN) \quad (3.234)$$

és a Pfaffian definícióját lásd (3.225)-ben. Legyen most

$$\eta = \varphi_{000}, \quad y_{12} = \varphi_{100}, \quad y_{34} = \varphi_{010}, \quad y_{56} = \varphi_{001} \quad (3.235)$$

$$\xi = \varphi_{111}, \quad x^{12} = \varphi_{011}, \quad x^{34} = \varphi_{101}, \quad x^{56} = \varphi_{110} \quad (3.236)$$

Itt $x^{ij} = -x^{ji}$ és $y_{ij} = -y_{ji}$ és a mátrixok többi komponense zérus. A (3.222) spinornak tehát csak nyolc nemzérus amplitúdója van

$$\varphi = (\varphi_{000} \mathbf{1} + \varphi_{100} e^{12} + \cdots + \varphi_{110} e^{1234} + \cdots + \varphi_{111} e^{123456}) \otimes \mathbb{E}^{1/2}. \quad (3.237)$$

Tekintsük először a (3.230) alakú B-transzformációkat. Legyen

$$B_{12} = -a, \quad B_{34} = -b, \quad B_{56} = -c \quad (3.238)$$

ahol $B_{ij} = -B_{ji}$ és a többi komponens zérus. A fenti transzformációkra nézve a (3.237) alakú állapotok által kifeszített altér invariáns altér. Könnyen belátható az is, hogy amennyiben a φ_{ijk} amplitúdókat egy $|\varphi\rangle$ három-qubit állapotba szervezzük akkor a (3.230) transzformációkat az alábbi módon írhatjuk

$$e^{-B} : |\varphi\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} |\varphi\rangle \quad (3.239)$$

Hasonlóan amennyiben a (3.231) C-transzformációk paramétereit a

$$C^{12} = a, \quad C^{34} = b, \quad C^{56} = c \quad (3.240)$$

módon választjuk a megfelelő transzformációs szabály

$$e^{-C} : |\varphi\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\varphi\rangle. \quad (3.241)$$

Végezetül tekintsük a (3.232) transzformációt ahol

$$A^1_1 = A^2_2 = -\log a, \quad A^3_3 = A^4_4 = -\log b, \quad A^5_5 = A^6_6 = -\log c \quad (3.242)$$

és most a, b, c nemzérus komplex számok. Legyen $\mathcal{A} = e^A$, ekkor $e^{-\text{Tr} A/2} = (\text{Det} \mathcal{A})^{-1/2} = abc$. Rövid számolás mutatja, hogy a transzformációs szabály most az

$$e^{A - \text{Tr} A/2} : |\varphi\rangle \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} |\varphi\rangle \quad (3.243)$$

alakba írható. Ismeretes, hogy a (3.239), (3.241) és (3.243) transzformációk kombinálásával minden $SL(2, \mathbb{C})^{\otimes 3}$ transzformáció megkapható. Ezzel megmutattuk, hogy amennyiben a $SL(2, \mathbb{C})^{\otimes 3}$ csoportot a $Spin(12, \mathbb{C})$ csoportba a fenti módon beágyazzuk akkor a (3.237) spinor valóban egy három-qubit állapotnak megfelelően transzformálódik. Figyeljünk fel azonban arra, hogy a teljes SLOCC csoport a $GL(2, \mathbb{C})^{\otimes 3}$ csoport. Ahhoz, hogy ezt a csoportot megkapjuk az általánosított SLOCC csoportot ki kell bővítenünk a $\mathbb{C}^\times \times Spin(12, \mathbb{C})$ GSLOCC csoporttá.

Amennyiben a SLOCC csoport általánosításaként a $\mathbb{C}^\times \times Spin(12, \mathbb{C})$ GSLOCC csoportot tekintjük akkor három qubit rendszereket a pozitív és negatív kiralitású alterekbe egyaránt

beágyazhatunk. A szokásos beágyazást a negatív kiralitású altér biztosítja. Ekkor a SLOCC csoport olyan beágyazásával van dolgunk mely fermionok keltésére és eltüntetésére nem ad módot. A pozitív kiralitású altér azonban a SLOCC csoport olyan beágyazását is megengedi melyre a fermionszám nem marad meg. Ebben a képben a (3.239) és (3.241) képletekkel adott B és C transzformációk fermionpárok keltését és eltüntetését reprezentálják.

Természetesen a (3.235)-(3.236) definíciókon alapuló választás nem az egyetlen. A fenti tulajdonságokkal rendelkező három-qubit beágyazások száma legalább 15. Valóban, a (3.224) kvartikus relatív invariáns abban az esetben foglalja magába a SLOCC relatív invariáns Cayley-féle hiperdeterminánst, ha a (3.224)-ban szereplő $4\eta\text{Pf}(x)$ jellegű tagok a (2.92)-ben szereplő $4\varphi_{000}\varphi_{011}\varphi_{101}\varphi_{110}$ jellegű tagokra vezetnek. Mivel egy 6×6 -os antiszimmetrikus mátrix Pfaffian invariánsa 15 tagból áll ezért a fenti alakú megfeleltetések száma legalább 15. Valóban a Pfaffian invariánsnak a (3.123) definíciója azt mutatja, hogy a lehetséges kombinációk az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ számokból képezhető $\{(ij), (kl), (mn)\}$ partícióknak felelnek meg. Az általunk használt (3.235)-(3.236) beágyazás az $\{(12), (34), (56)\}$ partíciónak felel meg.

A fenti többértelműséget kiküszöbölhetjük ha a különböző kiralitásokkal kapcsolatos három-qubit beágyazásokat "kompatibilissé" tesszük. Ez az alábbi módon történik. Válasszuk a fenti 15-féle lehetőség közül az alábbi

$$\eta = \varphi_{000}, \quad y_{14} = \varphi_{100}, \quad y_{25} = \varphi_{010}, \quad y_{36} = \varphi_{001} \quad (3.244)$$

$$\xi = -\varphi_{111}, \quad x^{14} = -\varphi_{011}, \quad x^{25} = -\varphi_{101}, \quad x^{36} = -\varphi_{110} \quad (3.245)$$

Térjünk át a (3.41)-ben bevezetett címkézésre: legyen $(1, 2, 3, 4, 5, 6) = (1, 2, 3, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3})$. Ekkor

$$\varphi = \left(\eta \cdot 1 + y_{1\bar{1}} e^{1\bar{1}} + \dots - x^{1\bar{1}} e^{2\bar{2}3\bar{3}} - \dots - \xi e^{1\bar{1}2\bar{2}3\bar{3}} \right) \otimes \mathbb{E}^{1/2} \quad (3.246)$$

illetve (3.226) alapján

$$\psi = \left(P_{123} e^{123} + P_{1\bar{2}\bar{3}} e^{12\bar{3}} + \dots + P_{\bar{1}23} e^{\bar{1}23} + P_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} e^{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} \right) \otimes \mathbb{E}^{1/2} \quad (3.247)$$

ahol

$$P_{123} = \psi_{000}, \quad P_{1\bar{2}\bar{3}} = \psi_{001}, \quad \dots \quad P_{\bar{1}23} = \psi_{110}, \quad P_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = \psi_{111}. \quad (3.248)$$

Ekkor (3.192) alapján a (3.223) és (3.227) mátrixelemek segítségével képezhetjük a \mathcal{K}_φ és \mathcal{K}_ψ momentum leképezéseknek megfelelő K_φ és K_ψ spinor generátorokat. Rövid számolás mutatja, hogy a (3.244)-(3.248) választásokkal definiált három qubit állapotokra igaz a

$$K_\varphi \psi = K_\psi \varphi = 0 \quad (3.249)$$

kompatibilitási feltétel.

A fenti feltétel jelentése az alábbi. Az általánosított SLOCC csoportnak tekintett $\text{Spin}(12, \mathbb{C})$ csoport infinitezimális generátorát (3.192) definiálja. Ebben a csoportban megtalálhatjuk a szokásos három qubit SLOCC csoport $SL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ részcsoporthoz két kópiáját. Ez a két részcsoporthoz a két különböző kiralitású invariáns altéren nemtriviális módon hat. A (3.249) feltétel azt mutatja, hogy a megfelelő momentum leképezések ezen SLOCC részcsoporthoz generátorai.

Valóban, amennyiben a (3.238), (3.240) formulákban az $\{(12), (34), (56)\}$ párok helyett a $\{(1\bar{1}), (2\bar{2}), (3\bar{3})\}$ párokat írjuk, a (3.242) formulát pedig a

$$A^1_1 = A^{\bar{1}}_{\bar{1}} = -\log a, \quad A^2_2 = A^{\bar{2}}_{\bar{2}} = -\log b, \quad A^3_3 = A^{\bar{3}}_{\bar{3}} = -\log c \quad (3.250)$$

módon megváltoztatjuk akkor (3.192) spinor generátor exponencializáltja a ψ állapotot mint az egység operátor a φ állapotot pedig mint egy tetszőleges $SL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ transzformáció hat.

Hasonlóan, az

$$A^1_{\bar{1}} = a, \quad A^2_{\bar{2}} = b, \quad A^3_{\bar{3}} = c \quad (3.251)$$

választás a ψ állapot (3.239) alakú az

$$A^{\bar{1}}_1 = a, \quad A^{\bar{2}}_2 = b, \quad A^{\bar{3}}_3 = c \quad (3.252)$$

választás a (3.241) alakú míg az

$$A^1_1 = -A^{\bar{1}}_1 = \log a, \quad A^2_2 = -A^{\bar{2}}_2 = \log b, \quad A^3_3 = -A^{\bar{3}}_3 = \log c \quad (3.253)$$

választás a (3.243) alakú transzformációját vonja maga után. Ebben a duális esetben a spinor generátor exponencializáltja a φ állapoton mint az egységoperátor a ψ állapoton pedig mint a megfelelő $SL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ operáció hat. Figyeljünk fel arra, hogy a (3.243) alakú SLOCC transzformációkat az egyik esetben az A^i_j mátrix megfelelő 2×2 -es blokkjának átlósösszeg mentes része a másik esetben az egységmátrix-szal arányos része szolgáltatja. Tekintettel arra, hogy (3.227)-ben $v = u = 0$ és K_P átlósösszege zérus azonnal látható, hogy $K_\psi \varphi = 0$. Hasonlóan a (3.223) képletek tanulmányozása azt mutatja, hogy $K_\varphi \psi = 0$. Ismételten emlékeztetünk arra, hogy a fenti beágyazásokkal a teljes három qubit $GL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ SLOCC csoportokat csak akkor kapjuk vissza, ha a $Spin(12, \mathbb{C})$ csoport helyett a $\mathbb{C}^\times \times Spin(12, \mathbb{C})$ csoportot használjuk⁵².

Tekintsük most azt a fontos speciális esetet amikor a (3.247) ψ állapotot változtatlanul hagyjuk azonban a (3.244) φ állapotban csak négy nemzérus amplitúdót tartunk meg

$$\varphi = \left(\omega_{1\bar{1}} e^{1\bar{1}} + \omega_{2\bar{2}} e^{2\bar{2}} + \omega_{3\bar{3}} e^{3\bar{3}} - \xi e^{1\bar{1}2\bar{2}3\bar{3}} \right) \otimes \mathbb{E}^{1/2} \quad (3.254)$$

ahol $\omega = \omega_{1\bar{1}} e^{1\bar{1}} + \omega_{2\bar{2}} e^{2\bar{2}} + \omega_{3\bar{3}} e^{3\bar{3}}$ a V egy kanonikus alakba transzformált szimplektikus formájának is tekinthető. Ekkor rövid számolás mutatja, hogy a (3.249) kompatibilitási feltételek a

$$\omega_{[ij} P_{klm]} = 0, \quad \omega_{ik} (K_P)^k_j = \omega_{jk} (K_P)^k_i \quad (3.255)$$

alakba írhatók. Az első feltételből következik a második elég tehát az első figyelembe vennünk, ennek pedig az index mentes alakja : $\omega \wedge P = 0$. (3.56) alapján ez a feltétel azt fejezi ki, hogy a P három forma primitív az ω szimplektikus formára nézve. Amennyiben *valós* amplitúdójú állapotokat tekintünk akkor (3.99) alapján azt is tudjuk, hogy minden egyes P a V vektortéren egy komplex struktúrát definiál. Ebben a szellemben azt is mondhatjuk, hogy az $\omega \wedge P = 0$ feltétel a V -n lévő szimplektikus és komplex struktúrák kompatibilitását fejezi ki. A fentiek érvényben maradnak akkor is ha a (3.247)-ben szereplő P háromforma helyett egy tetszőleges primitív három formát veszünk. A (3.57) formula miatt egy tetszőleges primitív háromforma független komponenseinek száma 14.

Milyen fizikai interpretáció adható a három qubit rendszerek két különböző (3.246) és (3.247) fermionikus beágyazásainak? Bontsuk fel az egyrészecke állapotokat tartalmazó V vektorteret a $V = \mathbb{C}^6 = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$ módon. Az első faktor fejezze ki azt, hogy a fermionjaink három különböző helyre lokalizálódhatnak (például egy egydimenziós rács különböző rácspontjaiba) a második pedig azt, hogy a fermionok két lehetséges spinbeállással rendelkezhetnek. Például a V^* duális vektortér e^2 és \bar{e}^2 bázisvektorai egy 2-es helyre lokalizált "fel" vagy "le" spinnel rendelkező fermionikus egyrészecke állapotot reprezentálnak. A megfelelő \hat{f}^{2+} és $\hat{\bar{f}}^{2+}$ operátorok a Fock vákuumból a fenti tulajdonságú fermionokat keltik⁵³.

Ekkor a (3.247) ψ három qubit állapot azt a fizikai esetet reprezentálja amikor az 1, 2, 3 "rács-pontok" mindegyike egyszeresen betöltött. Ekkor a nyolc lehetséges $\psi_{000}, \psi_{001}, \dots, \psi_{111}$ komplex amplitúdó az egyes spinkonfigurációk súlyát reprezentálja. A (3.248) jelöléssel összhangban például ψ_{001} annak a lehetőségnek a súlya melyben az 1, 2 helyeken "fel" a 3 helyen pedig "le" spin

⁵²Ennek az extra $GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ csoportnak az eredetét illetően lásd a következő alfejezetet.

⁵³Értelemszerűen ha egy számon nem szerepel felülvonás akkor a spinvetület "fel" ha szerepel akkor a spinvetület "le" állású. A szilárdtestfizikából ismeretes $\hat{f}_{i\sigma}^\dagger$ jelölés ahol $i = 1, 2, 3$ és $\sigma = \uparrow, \downarrow$ a $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$ szerkezetet nyilván jobban tükrözi, de a kompaktabb 1, 2, 3, $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ jelölés a FLYQM kapcsán hasznosabbnak bizonyul.

valósul meg. A szokásos jelölésekkel ez a konfiguráció $(\uparrow | \uparrow | \downarrow)$ módon ábrázolható. Ezzel szemben a (3.246) φ három qubit állapot ellentett spinű fermion *párokkal* betöltött rácskonfigurációkat reprezentál. Például φ_{110} a $(\uparrow\downarrow | \uparrow\downarrow | \cdot \cdot)$ konfigurációnak a súlya.

A ψ állapot esetén a SLOCC transzformációk őrzik a részecskeszámot. Például az $I \otimes I \otimes \mathcal{A}_3$ lokális SLOCC transzformáció a 3. rácsponton a megfelelő spinbeállítások terében forgat. A φ állapot esetén a SLOCC transzformációk nem őrzik a részecskeszámot. Ekkor például alkalmas $I \otimes I \otimes \mathcal{A}_3$ alakú lokális SLOCC transzformációval ellentett spinű fermion párokat kelthetünk vagy eltüntethetünk. Jóllehet a SLOCC csoportok fizikai jelentése a fenti esetekben alapvetően különböző a (3.249) feltételek teljesülése esetén a SLOCC csoportok mindkét kópiáját konzisztens módon beágyazhatjuk a $\mathbb{C}^\times \times Spin(12, \mathbb{C})$ GSLOCC csoportba [11]. A 3.2.3. fejezetben foglaltaknak megfelelően az is belátható, hogy az általánosított SLOCC csoportba az 1, 2, 3 rácshelyek permutálását végző S_3 szimmetrikus csoportot is beágyazhatjuk. Általában is igaz az, hogy a $\mathbb{C}^\times \times Spin(4N, \mathbb{C})$ általánosított SLOCC csoportba beágyazhatjuk az $S_N \ltimes G$ N -qubit SLOCC csoportot ahol $G = GL(2, \mathbb{C})^{\times N}$. A csoportszorzás explicit alakját az $N = 4$ négy-qubit esetben a (2.200) egyenletben már felírtuk.

4. FEJEZET

Freudenthal rendszerek

4.1. Motiváció

A figyelmes Olvasónak biztos feltűnt, hogy az eddigiekben tanulmányozott egyszerű összefonódott rendszerek közül néhánynak a SLOCC osztályszerkezete a 2.5 fejezetben tanulmányozott három-qubit rendszerek megfelelő SLOCC osztályainak szerkezetére hasonlít. Ekkor mint tudjuk öt jellegzetes osztály van: a triviális osztály mely csak a zérus állapotból áll, a teljesen szeparálható osztály, a biszeparálható osztály, a W-osztály, és a GHZ-osztály. A négy nemtriviális osztály nemnormált reprezentánsaira például a szokásos $|000\rangle$, $|001\rangle + |010\rangle$, $|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle$ illetve $|000\rangle + |111\rangle$ állapotok szolgálnak.

Ugyanez a négy nemtriviális osztály bukkan fel a hat egyrészecske állapottal rendelkező háromfermion rendszereknél is. (Lásd a (3.78)-(3.81) három-qubit-szerű reprezentánsokat.) Egy további példát szolgáltat az a 3.2.4 alfejezetben tárgyalt fontos eset amikor az egyrészecske állapotok hat dimenziós terén még adott egy szimplektikus struktúra is mely eleget tesz a (3.56) kompatibilitási feltételnek. Ekkor olyan háromfermion rendszereket kapunk melyeknek a megengedhető SLOCC transzformációi a $GL(6, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times \times SL(6, \mathbb{C})$ SLOCC transzformációkról a $\mathbb{C}^\times \times Sp(6, \mathbb{C})$ szimplektikus formát is őrző SLOCC csoport transzformációkra korlátozódnak. Kiderül, hogy a nemtriviális szimplektikus SLOCC osztályok száma megint négy, a szokásos három-qubit-szerű reprezentánsokkal.

Ezek a három részrendszerből álló rendszerek természetes módon egymásba "skatulyázhatók". Ez azt jelenti, hogy a megfelelő SLOCC-csoportok is egymás részcsoporthai azaz¹

$$GL(2, \mathbb{C})^{\times 3} \subset \mathbb{C}^\times \times Sp(6, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^\times \times SL(6, \mathbb{C}). \quad (4.1)$$

Mint azt a 3.5.7 alfejezetben megtanultuk amennyiben a rögzített fermionszámról áttérünk változó fermionszámról ezt a beskatulyázást még tovább is folytathatjuk. Láttuk, hogy hat egyrészecske állapottal rendelkező fermionikus rendszerek esetén három-qubit rendszerek beágyazására a kiralitástól függően két különböző lehetőségünk van. A páros kiralitású esetben a fermionrendszer állapotát a (3.222), páratlan kiralitású esetben a (3.226) Fock-tér-beli állapotvektor reprezentálja. Mindkét állapottér konzisztens módon tartalmazza a három-qubit rendszerek állapotterét. Ez azt jelenti, hogy a permutációkkal kibővített SLOCC csoport hatást a GSLOCC transzformációk $\mathbb{C}^\times \times Spin(12, \mathbb{C})$ csoporthatásába (páros Clifford csoport) ekvivariáns módon beágyazhatjuk. Fermionrendszerekre tehát a megfelelő csoportbeágyazások

$$\mathbb{C}^\times \times Sp(6, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^\times \times SL(6, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^\times \times Spin(12, \mathbb{C}). \quad (4.2)$$

Ezeknek a fermionrendszereknek az állapotterei tehát tartalmazzák a három megkülönböztethető qubit állapottérét.

A későbbiekben szükségünk lesz még egy olyan összefonódott rendszerre is mely három megkülönböztethetetlen bozonikus qubitből áll. Megmutatjuk, hogy ez az extra rendszer a fenti

¹A három-qubit rendszerek SLOCC csoportját $\mathbb{C}^\times \times SL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$ alakba is írhatjuk. Mivel $SL(2, \mathbb{C}) \simeq Sp(2, \mathbb{C})$ ezért ennek a csoportnak a három kópiája az $Sp(6, \mathbb{C})$ csoportba a (3.47) mintának megfelelően beágyazható. A \mathbb{C}^\times faktor a nemzérus komplex számokkal történő újranyomtatásra utal.

négy speciális összefonódott rendszer alkotta sorozathoz egy további fontos esetet ad. A következő alfejezetben ezt a $(GL(2, \mathbb{C})^{\times 3})_{\text{diag}}$ SLOCC csoporton alapuló rendszert tanulmányozzuk. Az ezt követő alfejezetekben a célunk az, hogy a fenti öt egymásba ágyazott összefonódott rendszert kapcsolatba hozzuk az úgynevezett Freudenthal-féle hármas rendszerekkel. Ezeket a rendszereket Hans Freudenthal holland matematikus vezette be a múlt század ötvenes éveiben [Fre54] abból a célból, hogy a kivételes Lie-algebrák ($\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$) szerkezetét tanulmányozhassa. Ezek az eredmények az egyszerű három részrendszeres összefonódott rendszerek és a kivételes Lie-algebrák geometriája közötti meglepő kapcsolatokra mutatnak rá.

A Freudenthal rendszerek összefonódottság elméletben történt felhasználása először a hat egyrészecske állapotos háromfermion rendszerek kapcsán [18] történt. A FLYQM megjelenésével ezt számos egyéb alkalmazás követte [VL09, BDD⁺09c, BDD⁺09a, BDDR09, BDL12, Bor13]. Az alábbiakban bemutatott tárgyalás a Szerző ezidáig nem publikált munkája.

4.2. Három bozonikus qubit

A három bozonikus qubitet reprezentáló állapot szimmetrikus a részrendszerek permutációjára nézve. Ennek megfelelően a $|\Psi\rangle \in \text{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$ állapotot az alábbi alakba írjuk

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & \Psi_0|000\rangle + \Psi_1(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \\ & + \Psi_2(|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle) + \Psi_3|111\rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Normált állapotok esetén teljesül még a $|\Psi_0|^2 + 3|\Psi_1|^2 + 3|\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2 = 1$ feltétel. A SLOCC ekvivalencia definíciója ebben az esetben

$$|\Psi\rangle \simeq_{\text{SLOCC}} |\Phi\rangle \Leftrightarrow |\Psi\rangle = g \otimes g \otimes g |\Phi\rangle, \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}). \quad (4.4)$$

Az alapvető relatív invariáns továbbra is Cayley hiperdeterminánsa mely a (2.91) hármas összefonással van kapcsolatban és most az alábbi alakba írható

$$D(\Psi) = \Psi_0^2 \Psi_3^2 - 3\Psi_1^2 \Psi_2^2 - 6\Psi_0 \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 + 4(\Psi_0 \Psi_2^3 + \Psi_3 \Psi_1^3). \quad (4.5)$$

A Cayley hiperdetermináns transzformációs tulajdonsága $D(\Psi) \mapsto (\text{Det } g)^6 D(\Psi)$. A triviális osztályt nem számolva *három* SLOCC osztályunk van: a GHZ a W, és az (A)(B)(C) osztály. A megfelelő normált reprezentánsok most is a (2.80), (2.81) és a $|000\rangle$ állapotok. Három bozonikus rebit esetén $|\Psi\rangle \in \text{Sym}^3(\mathbb{R}^2)$ és a SLOCC hatásban szereplő $g \in GL(2, \mathbb{R})$. Ekkor a triviális osztályt nem számolva *négy* SLOCC osztályunk van. Az extra osztály annak felel meg, hogy most a GHZ osztály felhasad két GHZ_{\pm} osztályra (2.131) és (2.132) normált reprezentánsokkal.

A három bozonikus qubit geometriájának tárgyalására a permutációs szimmetriát sértő megszokott módszer most nem célravezető. Egy a permutációs szimmetriát is figyelembe vevő geometriai tárgyalást találunk A. Gustavsson és D. C. Brody cikkében [BGH07].

A három bozonikus qubit rendszerek matematikája a bináris köbös formák klasszikus elméletével kapcsolatos. Ennek tisztázásához legyen

$$V_{\mathbb{C}} \equiv \{\mathcal{P}(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 | a, b, c, d \in \mathbb{C}\} \quad (4.6)$$

a bináris köbös formák tere a komplex számtest felett. A $\mathcal{P}(u, v)$ köbös polinom diszkriminánsa

$$\Delta(\mathcal{P}) = b^2c^2 - 27a^2d^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d. \quad (4.7)$$

Definiáljuk a $GL(2, \mathbb{C})$ csoport hatását $V_{\mathbb{C}}$ -n az alábbi módon

$$g\mathcal{P}(u, v) = \mathcal{P}((u, v)g). \quad (4.8)$$

Rövid számolás mutatja, hogy ha a $|\Psi\rangle$ bozonikus három-qubit állapothoz az

$$\begin{aligned} F : \text{Sym}^3(\mathbb{C}^2) &\longrightarrow V_{\mathbb{C}} \\ |\Psi\rangle &\longmapsto \Psi_0 u^3 + 3\Psi_1 u^2 v + 3\Psi_2 u v^2 + \Psi_3 v^3 \end{aligned} \quad (4.9)$$

leképezésnek megfelelően egy köbös formát rendelünk, akkor a (4.4) SLOCC csoport hatás a megfelelő (4.8) csoport hatásba megy át. A fenti bijektív megfeleltetéssel kapjuk, hogy

$$\Delta(F(|\Psi\rangle)) = -27D(\Psi). \quad (4.10)$$

Például a kanonikus $|000\rangle + |111\rangle$ nemnormált GHZ állapotnak megfelelő köbös forma a $F(|GHZ\rangle) = u^3 + v^3$ polinom. A (2.121) kanonikus alakkal kapcsolatos fejtegetéseink alapján már tudjuk, hogy amennyiben $\Delta \neq 0$ a komplex számtest felett minden bináris köbös forma erre az alakra hozható.

A FLYQM során a komplex és a valós amplitudójú állapotokon túl olyan állapotokat is fogunk használni, melyek amplitúdói *egész* számok. Például az elektromos és mágneses töltésekkel is rendelkező extrémális fekete lyuk megoldások töltéskonfigurációit a Dirac-Zwanziger féle kvantálásnak köszönhetően egész számokkal jellemezhetjük. Az úgynevezett t^3 modellben négy töltés szerepel melyeket megfeleltethetünk egy olyan nemnormált bozonikus három-qubit állapothoz melynek amplitúdói egész számok. Ekkor a SLOCC transzformációk $SL(2, \mathbb{Z})$ csoportja a számelméletből jól ismert moduláris csoportot adja. Ez a csoport a t^3 modell úgynevezett U -dualitási csoportja. A (4.9) megfeleltetés miatt ezek a speciális „töltésállapotok” a köbös formák terében egy

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{P} \in V_{\mathbb{Z}} \mid a, d \in \mathbb{Z}, \quad b, c \in 3\mathbb{Z}\} \quad (4.11)$$

rácsot adnak. Mivel $V_{\mathbb{Z}} \subset V_{\mathbb{R}}$ ezért definiálhatjuk az alábbi két rácsot

$$\mathcal{L}_{\pm} \equiv \{\mathcal{P} \in \mathcal{L} \mid \pm \Delta(\mathcal{P}) > 0\}. \quad (4.12)$$

A FLYQM tárgyalása során látni fogjuk, hogy a fenti "töltésállapotok" (4.5) Cayley hyperdeterminánsának abszolútértékének négyzetgyöke a megfelelő fekete lyuk megoldás szemiklasszikus Bekenstein-Hawking entrópiáját adja. Azt is be fogjuk látni, hogy a (4.10) összefüggés miatt \mathcal{L}_+ elemei reprezentálják azokat a szuperszimmetrikus (BPS) töltéskonfigurációkat melyekre a szemiklasszikus Bekenstein-Hawking entrópia *negatív*. Hasonlóan \mathcal{L}_- elemei felelnek meg a nem-BPS töltéskonfigurációknak. Ezekre a megfelelő entrópia *pozitív*.

Két $|\Psi\rangle$ és $|\Phi\rangle$ töltéskonfiguráció U -dualitás *ekvivalens* akkor és csak akkor ha (4.9) alapján létezik olyan $g \in SL(2, \mathbb{Z})$, hogy $gF(|\Phi\rangle) = F(|\Psi\rangle)$. Legyen most $n \neq 0$ egész szám! Defináljuk a rögzített entrópiájú BPS és nem-BPS töltéskonfigurációkat az alábbi módon

$$\mathcal{L}_{\pm}(n) \equiv \{\mathcal{P} \in \mathcal{L}_{\pm} \mid \Delta(\mathcal{P}) = n\}. \quad (4.13)$$

Fizikai szempontból fontos az a klasszikus eredmény, hogy rögzített n -re léteznek $\mathcal{L}_{\pm}(n)$ -ben *inekvivalens* köbös formák.² Ez azt jelenti, hogy léteznek olyan U -dualitás inekvivalens töltéskonfigurációk melyek szemiklasszikus entrópiája ugyanaz. Más szóval \mathcal{L}_{\pm} -on az $SL(2, \mathbb{Z})$ hatása *nem tranzitív*. Az $\mathcal{L}_{\pm}(n)$ -ben lévő inekvivalens osztályok száma az *osztály szám* $h_{\pm}(n)$. A t^3 modell speciális esetében a $h_{\pm}(n)$ explicit alakja ismert [Nak98]. Ez azt is jelenti, hogy az analitikus számelmélet eredményeinek köszönhetően a \mathbb{Z} feletti bozonikus három-qubit SLOCC összefonódottsági osztályok szerkezete is ismert.

4.3. Freudenthal-féle hármasszettek

Az előző alfejezetben tárgyalt három bozonikus qubit rendszerével együtt már öt olyan egyszerű összefonódott rendszerünk van melyek SLOCC osztályainak szerkezete meglepő struktúrális hasonlatosságokat mutat. Mindegyik rendszer beágyazható a $\mathbb{C}^{\times} \times Spin(12, \mathbb{C})$ GSLOCC csoporttal rendelkező hat egyrészecske állapotos fermionrendszerek páros vagy páratlan kiralitással

²Ezen formák száma minden rögzített n -re véges.

rendelkező verziójába. Mindezek a tulajdonságok arra utalnak, hogy a fenti rendszereket egy további rejtett algebrai struktúra köti össze. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy ez valóban így van. A megfelelő algebrai struktúra a matematikai irodalomban "Freudenthal féle hármas-rendszer" néven ismert és a kivételes Lie-algebrák és az úgynevezett "mágikus négyzet" [Bae02] szerkezetével kapcsolatos.

A Freudenthal-féle hármasrendszerek megkonstruálására számos eljárás ismert. A legismertebb, és a fizikai alkalmazások szempontjából a legfontosabb a köbös Jordan algebrákon alapuló tárgyalás. 1983 óta ezek az algebrák az úgynevezett "mágikus szupergravitációs elméletek" jól ismert szereplői [GST83, GST84, GST85, Sie87]. Ezek a struktúrák a kvantumos összefonódottság és a FLYQM kontextusában először R. Kallosh és A. Linde munkájában jelentek meg [KL06]. A szerzők három qubit rendszereket egy olyan szokatlan algebrai formalizmusban tárgyaltak mely lényegében ekvivalens a Freudenthal rendszerek Jordan algebrákon alapuló megszokott formalizmusával. Vajon vissza lehet-e vezetni a mágikus négyzettel kapcsolatos valamennyi speciális Lie algebrát egy qubit rendszereken alapuló algebrai formalizmusra? A Elduque matematikai munkássága alapján [Eld04] a válasz a kérdésre valószínűleg igen [5]. Sajnos a fenti érdekes kapcsolat kvantum információelméleti alkalmazások szempontjából vett értéke meglehetősen kétséges. Mint látni fogjuk azonban a fenti észrevétel a dolgozat második felében bemutatásra kerülő FLYQM szempontjából igen hasznos.

4.3.1. Szimplektikus hármasrendszerek . Egy Freudenthal féle hármasrendszer egy *szimplektikus hármasrendszer* melyet az alábbi axiómák definiálnak [YA75].

Egy \mathfrak{A} szimplektikus hármasrendszer egy \mathfrak{A} vektortér \mathbb{C} felett ellátva egy $\{\cdot, \cdot\} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ szimplektikus formával³ és egy $[\cdot, \cdot, \cdot] : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ trilineáris hármas szorzattal úgy, hogy az alábbi axiómák teljesülnek:

$$[x, y, z] = [y, x, z] \quad (4.14)$$

$$[x, y, z] = [x, z, y] + 2\{y, z\}x - \{z, x\}y - \{x, y\}z \quad (4.15)$$

$$[u, v, [x, y, z]] = [[u, v, x], y, z] + [x, [u, v, y], z] + [x, y, [u, v, z]] \quad (4.16)$$

Megmutatható, hogy (4.15)-(4.16) következményeként igaz, hogy

$$\{[u, v, x], y\} + \{x, [u, v, y]\} = 0 \quad (4.17)$$

Figyeljük meg, hogy (4.16) azt mutatja, hogy az $L_{uv} : x \mapsto [u, v, x]$ lineáris leképezés egy *deriváció*. Az (4.14) axióma értelmében: $L_{xy} = L_{yx}$. A (4.17) tulajdonságból pedig következik, hogy L_{xy} nemcsak lineáris hanem egyúttal őrzi a szimplektikus formát. Nyilván a második axióma a szimplektikus struktúra és a hármas szorzat között nagyon erős megszorítást ad.

4.3.2. A hat módusú fermionrendszer mint szimplektikus hármasrendszer . Tudjuk, hogy a $\mathbb{C}^\times \times Spin(12, \mathbb{C})$ GSLOCC csoporton alapuló hat módusú fermionrendszer további négy egyszerű összefonódott rendszert foglal magába. Mutassuk meg, hogy a páros kiralitású esetben ez a rendszer a szimplektikus hármasrendszer egy példáját adja!

Jelöljük a fermionikus Fock tér páros kiralitású alterét \mathcal{F}^+ -val és írjuk ennek az alternek egy tetszőleges (3.222) vektorát a fizikában használatos

$$|\varphi\rangle = \left(\eta \hat{\mathbf{1}} + \frac{1}{2!} y_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j + \frac{1}{2!} \frac{1}{4!} x^{ij} \varepsilon_{ijklmn} \hat{p}^k \hat{p}^l \hat{p}^m \hat{p}^n + \xi \hat{p}^1 \hat{p}^2 \hat{p}^3 \hat{p}^4 \hat{p}^5 \hat{p}^6 \right) |0\rangle \quad (4.18)$$

alakba ahol a fermionikus keltő és eltüntető operátorokra bevezettük a $\hat{f}^{+i} \equiv \hat{p}^i$, $\hat{f}_j = \hat{n}_j$ jelölést⁴. Ezzel a jelöléssel egy $Spin(12, \mathbb{C})$ transzformáció alakja $\hat{s} = e^{\hat{S}}$ ahol (3.192) alapján

³Egy alternáló bilineáris formával, azaz egy olyan bilineáris formával melyre $\{x, y\} = -\{y, x\}$, $x, y \in \mathfrak{A}$.

⁴ $\hat{p}^i \hat{n}_j + \hat{n}_j \hat{p}^i = \delta^i_j \hat{\mathbf{1}}$ stb.

$$\hat{S} = -\hat{B} - \hat{C} + \hat{A} - \frac{1}{2}(\text{Tr}A)\hat{\mathbf{1}} \text{ és}$$

$$\hat{A} = A^i_j \hat{p}^j \hat{n}_i, \quad \hat{B} = \frac{1}{2} B_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j, \quad \hat{C} = \frac{1}{2} C^{ij} \hat{n}_i \hat{n}_j. \quad (4.19)$$

Az \hat{A} , \hat{B} és \hat{C} generálta véges transzformációk alakja már (3.230)-(3.232)-ből ismert. Tekintsük most ennek alapján a $|\varphi\rangle \mapsto \hat{S}|\varphi\rangle$ infinitezimális transzformációt

$$\eta' = (C, y) - \frac{1}{2}(\text{Tr}A)\eta \quad (4.20)$$

$$\xi' = -(B, x) + \frac{1}{2}(\text{Tr}A)\xi \quad (4.21)$$

$$x'^{ij} = -2(B \times y)^{ij} + \xi C^{ij} + A^j_k x^{ki} - A^i_k x^{kj} + \frac{1}{2}(\text{Tr}A)x^{ij} \quad (4.22)$$

$$y'_{ij} = 2(C \times x)_{ij} - \eta B_{ij} + A^k_{ij} y_{kj} - A^k_{ji} y_{ki} - \frac{1}{2}(\text{Tr}A)y_{ij} \quad (4.23)$$

ahol a megfelelő definíciókat lásd (3.233)-ben.

A (3.223) momentum leképezés explicit alakjából azt is látjuk, hogy minden $|\varphi\rangle$ fermionikus állapot definiál egy olyan $\hat{K}_\varphi = -\hat{B}_\varphi - \hat{C}_\varphi + \hat{A}_\varphi - \frac{1}{2} \text{Tr} A_\varphi \hat{\mathbf{1}}$ GSLOCC transzformációt melynek $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi$ mátrixai az állapot amplitúdóitól kvadratikusan függenek. Egy adott $(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle)$ fermionikus állapotpárhoz tehát megadhatunk egy másik $(\hat{K}_{\varphi_1}|\varphi_2\rangle, \hat{K}_{\varphi_2}|\varphi_1\rangle)$ állapotpárt.

Fenti konstrukciót még tovább is általánosíthatjuk. A (3.223) képletekből az is látható, hogy minden $(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle)$ állapotpárhoz is hozzárendelhető egy $\hat{K}_{\varphi_1\varphi_2} \in \text{Spin}(12, \mathbb{C})$ elem azaz egy GSLOCC transzformáció. Ahhoz, hogy ezt lássuk polarizáljuk a (3.223) formulákat az alábbi módon

$$\hat{K}_{\varphi_1\varphi_2} \equiv -\hat{B}_{\varphi_1\varphi_2} - \hat{C}_{\varphi_1\varphi_2} + \hat{A}_{\varphi_1\varphi_2} - \frac{1}{2} \text{Tr} A_{\varphi_1\varphi_2} \hat{\mathbf{1}} \quad (4.24)$$

ahol

$$A_{\varphi_1\varphi_2} = x_1 y_2 + x_2 y_1 + [\eta_1 \xi_2 + \eta_2 \xi_1 - \omega_{12}] I \quad (4.25)$$

$$B_{\varphi_1\varphi_2} = 2x_1 \times x_2 - \xi_1 y_2 - \xi_2 y_1, \quad C_{\varphi_1\varphi_2} = 2y_1 \times y_2 - \eta_1 x_2 - \eta_2 x_1 \quad (4.26)$$

$$2\omega_{12} = -\text{Tr} A = 3\eta_1 \xi_2 + 3\eta_2 \xi_1 - (x_1, y_2) - (x_2, y_1). \quad (4.27)$$

Itt I a 6×6 -os egységmátrix, $x_1 y_2$ pedig a megfelelő két antiszimmetrikus 6×6 -os mátrix szorzatára utal. Felhasználtuk még a (3.233) definíciókat. Figyeljük meg, hogy a (4.25)-(4.26) formulákból egyből látható, hogy

$$\hat{K}_{\varphi_1\varphi_2} = \hat{K}_{\varphi_2\varphi_1}. \quad (4.28)$$

Tekintsük most a

$$|\varphi'\rangle \equiv \hat{K}_{\varphi_1\varphi_2} |\varphi_3\rangle \quad (4.29)$$

fermionikus állapotot! Ez a $|\varphi'\rangle$ állapot a (4.18) alakban áll elő ahol most a megfelelő 32 amplitúdót az (η', y', x', ξ') , $|\varphi_\alpha\rangle$ esetén pedig az $(\eta_\alpha, y_\alpha, x_\alpha, \xi_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) négyesek címkézik. Az (η', y', x', ξ') négyes explicit alakját a (4.20)-(4.23) formulák adják, ahol most az A, B és a β mátrixok helyett a (4.25)-(4.26) mátrixok, az (η, y, x, ξ) helyett pedig a $(\eta_3, y_3, x_3, \xi_3)$ négyes irandó. Ezzel az eljárással a $(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle)$ állapotvektor-hármashoz egy új $|\varphi'\rangle$ állapotvektort rendeltünk

$$(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle) \mapsto |\varphi'\rangle = \hat{K}_{\varphi_1\varphi_2} |\varphi_3\rangle. \quad (4.30)$$

A kapott hozzárendelés egy hármasszorzat melyet az egyszerűség kedvéért az alábbi módon jelölünk

$$[\cdot, \cdot, \cdot] : \mathcal{F}^+ \otimes \mathcal{F}^+ \otimes \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{F}^+, \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \mapsto [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \equiv \mathcal{K}_{\varphi_1\varphi_2} \varphi_3. \quad (4.31)$$

Definiáljunk most az alábbi módon egy szimplektikus formát

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{F}^+ \otimes \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \{\varphi_1, \varphi_2\} \equiv -\frac{1}{2}(\varphi_1 | \varphi_2) \quad (4.32)$$

ahol

$$(\varphi_1|\varphi_2) = \eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1 + (x_1, y_2) - (x_2, y_1) \quad (4.33)$$

a (3.212)-ből már ismerős alternáló forma. Ellenőrizhető, hogy a 32 dimenziós \mathcal{F}^+ komplex vektortéren ílymódon megadott hármasszorzat és szimplektikus forma kielégíti a (4.14)-(4.16) axiómákat. Tehát az $(\mathcal{F}^+, [\cdot, \cdot], \{\cdot, \cdot\})$ hármasszorzat egy szimplektikus hármasszorzatrendszer.

4.3.3. Jordan algebrák . Mint említettük, a Freudenthal-féle hármasszorzatrendszer fizikában használatos konstrukciója a köbös Jordan algebrákra alapul. A következőkben ezt a konstrukciót ismertetjük. A Jordan algebrákra illetően a klasszikus referencia Jacobson könyve [Jac68] egy az utóbbi időben megjelent hasznos monográfia McCrimmon munkája [McC04].

Egy \mathfrak{J} Jordan algebra egy olyan vektortér egy test felett mely el van látva egy olyan bilineáris szorzással melyre teljesülnek az alábbi axiómák

$$x \bullet y = y \bullet x, \quad x^2 \bullet (x \bullet y) = x \bullet (x^2 \bullet y). \quad (4.34)$$

A Jordan szorzás kommutatív, de nem feltétlenül asszociatív. Nyilván egy asszociatív mátrix algebra egyúttal egy Jordan algebra amennyiben a Jordan szorzatot a

$$x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx) \quad (4.35)$$

módon értelmezzük. A bennünket érdeklő Jordan algebrák "köbös Jordan algebrák". Ez azt jelenti, hogy minden $x \in \mathfrak{J}$ egy harmadfokú polinomiális egyenletet elégít ki. Az köbös Jordan algebrákra létezik az úgynevezett Springer konstrukció mely egy vektortéren megadott köbös "norma" fogalmán⁵ alapul [McC04]. A norma és egy speciális báziselem lerögzítésével a Jordan szorzat megkonstruálható [McC04, Sie87]. Az ilyen tulajdonságú Jordan algebrák közül bennünket csak azok érdekelnek melyek olyan 3×3 -as Hermitikus mátrixokon alapulnak melyeknek elemei valós számok, komplex számok, kvaterniók vagy oktoniók. Jelölje tehát a következőkben $\mathfrak{J}_{\mathbb{F}}$ ahol $\mathbb{F} = (\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O})$ a megfelelő mátrixok terét: $\text{Sym}(3, \mathbb{R})$, $\text{Herm}(3, \mathbb{C})$, $\text{Herm}(3, \mathbb{H})$, $\text{Herm}(3, \mathbb{O})$. Egy ilyen mátrixot az alábbi módon parametrizálhatunk

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & c & \bar{b} \\ \bar{c} & \beta & a \\ b & \bar{a} & \gamma \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

ahol α, β, γ valós számok, a, b, c pedig a négy esetnek megfelelően valós számok, komplex számok, kvaterniók vagy oktoniók. Felülhúzással a megfelelő kompozíciós algebra-beli konjugálást jelöltük. Figyeljük meg, hogy a (4.36) alakú mátrixokat 6, 9, 15, 27 valós szám paraméterezi.

Megmutatható [McC04, Jac68, Bae02], hogy a (4.35) szorzatra nézve $\mathfrak{J}_{\mathbb{F}}$ mindegyike Jordan algebra. A szokásos determináns általánosításával a fentiekben definiált mátrixokra értelmezhetünk egy köbös normát

$$\text{Det } x = \alpha\beta\gamma - \alpha|a|^2 - \beta|b|^2 - \gamma|c|^2 + (ab)c + \bar{c}(\bar{b}\bar{a}). \quad (4.37)$$

Definiáljuk most a kvadratikus \sharp leképezést

$$x^{\sharp} = x^2 - (\text{Tr } x)x + \frac{1}{2}((\text{Tr } x)^2 - \text{Tr}(x^2)) \cdot 1 \quad (4.38)$$

ahol 1 a 3×3 -as egységmátrix. Nyilván

$$xx^{\sharp} = x^{\sharp}x = \text{Det } x \cdot 1 \quad (4.39)$$

⁵Egy nem 2 és 3 karakterisztikájú \mathbb{F} test feletti V vektortéren megadott $N : V \rightarrow \mathbb{F}$ leképezés köbös norma, ha $N(\lambda x) = \lambda^3 N(x)$ és az N teljes polarizálásával kapott forma trilineáris [Kru07].

ezt a $xx^\sharp - \text{Det } x = 0$ alakba írva láthatjuk, hogy egy tetszőleges $x \in \mathfrak{J}_\mathbb{F}$ elem valóban egy harmadfokú polinomiális egyenletet elégít ki⁶. Polarizáljuk a \sharp leképezést, kapjuk

$$y \times z \equiv \frac{1}{2}((y+z)^\sharp - y^\sharp - z^\sharp). \quad (4.40)$$

Szükségünk lesz még a

$$(x, y) \equiv \text{Tr}(x \bullet y) \quad (4.41)$$

definícióra.

Legyen most $\mathcal{J}_\mathbb{F} = \mathfrak{J}_\mathbb{F} \otimes \mathbb{C}$ a $\mathfrak{J}_\mathbb{F}$ vektortér komplex kiterjesztése. Jelöljük a (4.41) bilineáris forma komplex kiterjesztését ugyanazzal a (\cdot, \cdot) szimbólummal. Ekkor a $\mathfrak{J}_\mathbb{F}$ Jordan algebrák komplexifikáltjai rendre a $\mathcal{J}_\mathbb{F}$: $\text{Sym}(3, \mathbb{C})$, $\text{Mat}(3, \mathbb{C})$, $\text{Skew}(6, \mathbb{C})$ és $\text{Herm}(3, \mathbb{O}) \otimes \mathbb{C}$ Jordan algebrák. A sorozat első két tagja érthetően a szimmetrikus komplex elemű 3×3 -as mátrixok és a tetszőleges komplex 3×3 -as mátrixok tere.

Az antiszimmetrikus 6×6 -os mátrixok megjelenése némi magyarázatra szorul. Mivel minden kvaterniót egy 2×2 -es mátrix-szal reprezentálhatunk tekintsük az alábbi megfeleltetést

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & c & \bar{b} \\ \bar{c} & \beta & a \\ b & \bar{a} & \gamma \end{pmatrix} \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \alpha\epsilon & c\epsilon & \tilde{b}\epsilon \\ \tilde{c}\epsilon & \beta\epsilon & a\epsilon \\ b\epsilon & \tilde{a}\epsilon & \gamma\epsilon \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Itt a baloldalon $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $a, b, c \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$, és a felülvonás kizárólag kvaternió konjugálást jelent. A jobb oldalon $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $a, b, c \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$. $\tilde{a} \equiv -\varepsilon a^T \varepsilon$ a (2.66)-ben már használt spin flip operáció⁷ ahol ε a standard $SL(2, \mathbb{C})$ invariáns antiszimmetrikus 2×2 -es mátrix, lásd (2.66). Azonnal látható, hogy $X^T = -X$ azaz $X \in \text{Skew}(6, \mathbb{C})$. A (4.42) megfeleltetés segítségével belátható, hogy

$$\text{Det}(x) \leftrightarrow \text{Pf}(X) \quad (4.43)$$

azaz a komplexifikált Jordan algebra köbös normája ekkor a (3.225)-ből ismeretes Pfaffian. Igazolható még az is, hogy

$$x^\sharp \leftrightarrow X^\sharp, \quad y \times z \leftrightarrow Y \times Z, \quad (x, y) \leftrightarrow (X, Y) \quad (4.44)$$

ahol a baloldalon szereplő mennyiségeket (4.38), (4.40) és (4.41), a jobboldaliakat pedig (3.233) definiálja.

A megfelelés jobb oldalán szereplő mennyiségekkel számolva kapjuk a fontos

$$4X \times (Y \times Z) = (X, Z)Y + (X, Y)Z + ZXY + YXZ \quad (4.45)$$

összefüggést. A baloldalon szereplő mennyiségekkel számolva kapjuk a Jordan algebrák elméletéből ismert

$$4x \times (y \times z) = (x, z)y + (x, y)z - 2\{y, x, z\} \quad (4.46)$$

identitást ahol

$$L_{xy}z \equiv \{x, y, z\} = (x \bullet y) \bullet z + x \bullet (z \bullet y) - (x \bullet z) \bullet y \quad (4.47)$$

az úgynevezett Jordan hármas szorzás. Amennyiben \mathfrak{J} asszociatív algebra akkor $\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(xyz + zyx)$. Tehát esetünkben $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ amikor a megfelelő algebrák asszociatívak

$$-xyz - zyx \leftrightarrow XYZ + ZYX. \quad (4.48)$$

Fontos még a nem asszociatív esetben is érvényes a későbbiekben felhasználásra kerülő

$$\text{Det}(x + y) = \text{Det } x + (x^\sharp, y) + (x, y^\sharp) + \text{Det } y \quad (4.49)$$

⁶Természetesen ezek az állítások a valós és komplex esetben triviálisak, a kvaternió és oktonió esetekben már kevésbé. A kvaterniószorzás ugyanis nem kommutatív de asszociatív, az oktoniószorzás pedig még csak nem is asszociatív.

⁷Ez a kvaternió konjugálásnak felel meg.

identitás.

A továbbiakban $\mathcal{J}_{\mathbb{F}} \equiv \mathcal{J}$. Jelöljük $\text{Str}(\mathcal{J})$ -vel a komplexifikált Jordan algebra azon transzformációit melyekre a köbös norma relatív invariáns⁸. Ezeket a transzformációkat a Jordan algebra "struktúra csoportjának" nevezzük. Az $\text{Str}(\mathcal{J})$ struktúracsoport centrumát a

$$D_{\lambda} : z \mapsto \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{C}^* \quad (4.50)$$

dilatációk adják. Legyen

$$T_B : z \mapsto z + B, \quad z, B \in \mathcal{J} \quad (4.51)$$

a "transzlációk" és amennyiben $\text{Det } z \neq 0$

$$\iota : z \mapsto -z^{-1} \quad (4.52)$$

az "inverziók" csoportja. Ekkor $D_{\lambda} \circ T_B \circ D_{\lambda}^{-1} = T_{\lambda B}$. Az inverziók, az eltolások és a struktúra-csoport transzformációk generálta csoportot a \mathcal{J} Jordan algebra $\text{Conf}(\mathcal{J})$ konform csoportjának nevezzük.

4.3.4. Freudenthal-féle hármas rendszerek és Jordan algebrák [Cle03, 15]. Legyen \mathcal{J} bármelyike a négy komplexifikált köbös Jordan algebrának: $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{J}_{\mathbb{H}}$ és $\mathcal{J}_{\mathbb{O}}$. Tekintsük a \mathcal{J} komplex együtthatós polinomalgebráját: $\mathcal{P}(\mathcal{J})$ -t. Jelöljük \mathcal{W} -vel ennek a $z \in \mathcal{J}$ változós polinomalgebrának azon alterét melynek elemei a

$$W_{\eta,y,x,\xi}(z) = \eta \text{Det } z + (y, z^{\sharp}) + (x, z) + \xi, \quad x, y, z \in \mathcal{J}, \quad \eta, \xi \in \mathbb{C} \quad (4.53)$$

alakba írhatók. $W_{\eta,y,x,\xi}(z)$ egy olyan harmadfokú komplex együtthatós polinom melynek együtthatóit az (η, y, x, ξ) négyes segítségével címkézhetjük. Nyilván

$$(\eta, y, x, \xi) \in \mathbb{C} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathbb{C}. \quad (4.54)$$

A továbbiakban a $\mathbb{C} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathbb{C}$ vektorteret a \mathcal{J} Jordan algebrán alapuló Freudenthal-féle hármasrendszernek fogjuk hívni és a $\mathcal{W}(\mathcal{J})$ szimbólummal jelöljük⁹. Figyeljük meg, hogy az $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ és \mathbb{O} kompozíciós algebrákra alapuló köbös Jordan algebrák választása esetén a $\mathcal{W}(\mathcal{J})$ vektortér komplex dimenziója: $1 + 6 + 6 + 1 = 14$, $1 + 9 + 9 + 1 = 20$, $1 + 15 + 15 + 1 = 32$ illetve $1 + 27 + 27 + 1 = 56$.

Idézzük most fel, hogy (3.58)-(3.60) alapján a hat egyrészecske állapottal rendelkező háromfermion rendszer 20, illetve a (3.61) feltételnek eleget tevő szimplektikus háromfermion rendszer 14 amplitúdóját pontosan ilyen alakba particionálhatjuk. Ezek a rendszerek tehát valószínűleg az \mathbb{R} -en és \mathbb{C} -n alapuló köbös Jordan algebrákkal kapcsolatos Freudenthal-féle hármasrendszerek. Az is sejthető, hogy a 32 amplitúdót tartalmazó beágyazó fermionrendszer (melyről már tudjuk, hogy egy Freudenthal rendszer) Jordan algebrája a kvaterniókon (\mathbb{H}) alapul. Ismerve a (4.42)-(4.44) megfelelés formuláit ahhoz, hogy a sejtésünket belássuk azt kell megmutatnunk, hogy a (4.2)-ben említett SLOCC csoportok egymásba ágyazásának a valós és komplex esetek kvaterniók esetbe történő beágyazása felel meg.

Ennek megmutatásához tekintsünk először egy tetszőleges $B \in \mathcal{J}$ Jordan algebra elemet és legyen

$$\eta = 1, \quad y = -B, \quad x = B^{\sharp}, \quad \xi = -\text{Det } B \quad (4.55)$$

Ekkor a (4.49) identitás felhasználásával látható, hogy

$$W_{1,-B,B^{\sharp},-\text{Det } B}(z) \equiv W_{1,0,0,0}(z - B) = \text{Det}(z - B). \quad (4.56)$$

Sőt (4.49), (4.40) ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$W_{\eta',y',x',\xi'}(z) = W_{\eta,y,x,\xi}(z - B) \quad (4.57)$$

⁸ $\text{Det}(gz) = \chi(g) \text{Det}(z)$, $z \in \mathcal{J}$, $g \in \text{Str}(\mathcal{J})$ ahol χ egy csoportkarakter.

⁹ \mathcal{W} tehát egy polinomalgebra, míg $\mathcal{W}(\mathcal{J})$ egy komplex vektortér.

ahol

$$\eta' = \eta, \quad y' = y - \eta B, \quad x' = x - 2y \times B + \eta B^\sharp \quad (4.58)$$

$$\xi' = \xi - (x, B) + (y, B^\sharp) - \eta \text{Det } B \quad (4.59)$$

Vessük ezt össze a (3.230)-ben kapott fermionrendszer e^{-B} transzformáltjával! A (4.43) és a (4.44) megfelelés alapján látjuk, hogy az általánosított SLOCC transzformációk ezen része megfelel a kvaterniós Jordan algebra $\text{Conf}(\mathcal{J}_{\mathbb{H}})$ konform csoportjának azzal a részével mely a (4.51) translációkkal kapcsolatos. Ez a megfelelés nyilván a megfelelő \mathbb{R} -en és \mathbb{C} -n alapuló beágyazott rendszerekre is fennáll. Sejtésünket tehát maradéktalanul igazolhatjuk, ha a fennmaradó (3.231) és (3.232) SLOCC transzformációkat is megfeleltetjük a kvaterniós $\text{Conf}(\mathcal{J}_{\mathbb{H}})$ konform csoport fennmaradó generátorainak. Ezzel az érveléssel kapnánk, hogy

$$\text{Conf}(\mathcal{J}_{\mathbb{R}}) \simeq Sp(6, \mathbb{C}), \quad \text{Conf}(\mathcal{J}_{\mathbb{C}}) \simeq SL(6, \mathbb{C}), \quad \text{Conf}(\mathcal{J}_{\mathbb{H}}) \simeq Spin(12, \mathbb{C}) \quad (4.60)$$

s így (4.2) értelmében a fenti csoport izomorfizmusok miatt a megfelelő SLOCC csoportokat a megfelelő Jordan algebrák konform csoportjaival azonosíthatnánk.

Figyeljük meg, hogy a translációs részcsoporthoz példája azt mutatja, hogy az azonosítás lényege az, hogy az illető Jordan algebra konform csoportja valószínűleg természetes módon hat a megfelelő Freudenthal féle hármasszisztémát definiáló (4.53) polinomok terén. J. Faraut és Gindikin munkája alapján tudjuk, hogy ez valóban így van. Az említett szerzők megmutatták, hogy a \mathcal{W} téren természetes módon megadható a $\text{Conf}(\mathcal{J})$ csoport egy projektív irreducibilis ábrázolása [FG96]. Ennek a $\mathcal{D}(g)$, $g \in \text{Conf}(\mathcal{J})$ ábrázolásnak az explicit alakja a $\text{Conf}(\mathcal{J})$ csoportot generáló translációkra, inverziókra és struktúra csoportra¹⁰

$$(\mathcal{D}(T_B)W)(z) = W(z - B), \quad B \in \mathcal{J} \quad (4.61)$$

$$(\mathcal{D}(\iota)W)(z) = \text{Det}(z)W(-z^{-1}) \quad (4.62)$$

$$(\mathcal{D}(g)W)(z) = \chi(g)^{1/2}W(g^{-1}z), \quad g \in \text{Str}(\mathcal{J}). \quad (4.63)$$

Ezek közül a translációkat ábrázoló explicit formulákat (4.58)-(4.59) adja. Az inverziók explicit alakja

$$\eta' = \xi, \quad y' = -x, \quad x' = y, \quad \xi' = -\eta. \quad (4.64)$$

Legyen most $\beta \in \mathcal{J}$ és határozzuk meg a $-\mathcal{D}(\iota \circ T_\beta \circ \iota)$ explicit alakját! A megfelelő definíciók felhasználásával kapjuk, hogy a transzformáció hatása a

$$\eta' = \eta + (y, \beta) + (x, \beta^\sharp) + \xi \text{Det } \beta \quad (4.65)$$

$$y' = y + 2x \times \beta + \xi \beta^\sharp, \quad x' = x + \xi \beta, \quad \xi' = \xi \quad (4.66)$$

explicit alakú. Ha most a (4.65)-(4.66) transzformációs szabályt (3.231)-vel összevetjük akkor látjuk, hogy ez az $e^{-\beta}$ általánosított SLOCC transzformációnak felel meg.

Tekintsük végül a $\mathcal{D}(g)$ explicit hatását ahol $g \in \text{Str}(\mathcal{J})$

$$\eta' = \chi^{-1/2}\eta, \quad y' = \chi^{-1/2}gy, \quad x' = \chi(g)^{1/2}(g^{-1})^T x, \quad \xi' = \chi(g)^{1/2}\xi. \quad (4.67)$$

A kvaterniós esetben ez a formula a

$$gy \leftrightarrow \mathcal{A}^T z \mathcal{A}, \quad (g^{-1})^T x \leftrightarrow \mathcal{A}^{-1} x \mathcal{A}^{-1T}, \quad \chi(g) \leftrightarrow \text{Det } \mathcal{A} \quad (4.68)$$

megfeleltetéssel a (3.232)-beli $e^{A - \text{Tr } A/2}$ SLOCC transzformációt adja ahol $\mathcal{A} = e^A$, $A \in GL(6, \mathbb{C})$.

Összefoglalva: a kvaterniós esetben azt kaptuk, hogy

$$e^{A - \frac{1}{2} \text{Tr } A} \longleftrightarrow \mathcal{D}(g), \quad g \in \text{Str}(\mathcal{J}_{\mathbb{H}}) \quad (4.69)$$

$$e^{-B} \longleftrightarrow \mathcal{D}(T_B), \quad B \in \mathcal{J}_{\mathbb{H}} \quad (4.70)$$

$$e^{-\beta} \longleftrightarrow \mathcal{D}(-\iota \circ T_\beta \circ \iota), \quad \beta \in \mathcal{J}_{\mathbb{H}}. \quad (4.71)$$

¹⁰Figyeljük meg, hogy az ábrázolás $(\mathcal{D}(g)W)(z) = j^{1/2}(g, z)W(g^{-1}z)$, $z \in \mathcal{J}$, $g \in \text{Conf}(\mathcal{J})$ alakba írható.

Mivel a jobb oldalon szereplő transzformációk generálják a $\text{Conf}(\mathcal{J}_{\mathbb{H}})$ a baloldaliak a $\text{Spin}(12, \mathbb{C})$ csoportot, ezért

$$GL(1, \mathbb{C}) \times \text{Spin}(12, \mathbb{C}) \simeq GL(1, \mathbb{C}) \times \text{Conf}(\mathcal{J}_{\mathbb{H}}). \quad (4.72)$$

Mivel ez az eset magábfoglalja a valós $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ és a komplex $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ esetet, a (4.60) izomorfizmusok is teljesülnek.

4.3.5. A hármas-szorzat . A köbös Jordan algebrákon alapuló Freudenthal-féle hármasrendszerek definiálásához meg kell adnunk az (4.14)-(4.16) axiómáknak eleget tevő hármas-szorzatot. Mivel a konstrukciót a kvaterniós esetben már megadtuk, a valós és a komplex eset tárgyalása egyszerű. Ez annak köszönhető, hogy a megfelelő Jordan algebrák ekkor asszociatívok. Az oktoniós eset konstrukciója megtalálható Freudenthal munkáiban [Fre54, YA75]. Ezt a mindegyik Jordan algebrára érvényes hármasszorzatot mi itt most a (4.20)-(4.23) formulák alkalmas módosításával adjuk meg.

Jelölje $A_{12} \equiv A_{\varphi_1 \varphi_2}$, $B_{12} \equiv B_{\varphi_1 \varphi_2}$ és $\beta_{12} \equiv \beta_{\varphi_1 \varphi_2}$ a (4.25)-(4.26) mennyiségeket. Ekkor a kvaterniós esetben a hármasszorzat explicit alakja

$$\eta' = (\beta_{12}, y_3) + \omega_{12}\eta_3, \quad \xi' = -(B_{12}, x_3) - \omega_{12}\xi_3 \quad (4.73)$$

$$x' = -2B_{12} \times y_3 + \beta_{12}\xi_3 - A_{12}x_3 + (A_{12}x_3)^T - \omega_{12}x_3 \quad (4.74)$$

$$y' = 2\beta_{12} \times x_3 - B_{12}\eta_3 + y_3 A_{12} - (y_3 A_{12})^T + \omega_{12}y_3 \quad (4.75)$$

ahol ω_{12} definícióját illetően lásd a (4.27) formulát.

Írjuk fel ezeket a 6×6 -os komplex elemű antiszimmetrikus mátrixokat tartalmazó formulákat 3×3 -as kvaternió Hermitikus mátrixokat tartalmazó alakba! A (4.42)-(4.44) "szótár" és a (4.45)-(4.46), (4.48) identitások felhasználásával kapjuk, hogy

$$-A_{12}x_3 + (A_{12}x_3)^T - \omega_{12}x_3 \longleftrightarrow -2 \left(\mathcal{L}_{x_1 y_2} + \mathcal{L}_{x_2 y_1} + \frac{1}{6}\omega_{12} \right) x_3 \quad (4.76)$$

ahol

$$\mathcal{L}_{xy}z \equiv -\{x, y, z\} + \frac{1}{3}(x, y)z. \quad (4.77)$$

Figyeljük meg, hogy $\mathcal{L}_{xy} : \mathcal{J}_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathcal{J}_{\mathbb{H}}$ egy olyan lineáris operátor mely tartalmazza a (4.47)-ben definiált Jordan-féle hármas-szorzást. Ebben az asszociatív esetben igaz, hogy $2\{x, y, z\} = xyz + zyx$. Tehát ha a (4.73)-(4.75) formulákban elvégezzük a (4.76) helyettesítést és a többi szimbólumot is a Jordan algebrás szótárnak megfelelően használunk akkor a $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ és $\mathcal{J}_{\mathbb{H}}$ esetekben egyaránt érvényes hármas-szorzatot kapunk. Megmutatható [Fre54, YA75], hogy amennyiben a formulákban szereplő Jordan-féle hármasszorzat (4.47) általános kifejezését használjuk akkor a definíció a nem asszociatív $\mathcal{J}_{\mathbb{O}}$ esetben is érvényes. Belátható az is [Fre54, YA75], hogy ha a szimplektikus formát a (4.32) módon definiáljuk akkor a Freudenthal-féle hármasszorzat ezen definíciója valóban kielégíti a (4.14)-(4.16) axiómákat.

4.3.6. A kvartikus invariáns és a Freudenthal duálás . A Freudenthal-féle hármas-szorzat segítségével egy fontos $\text{Conf}(\mathcal{J})$ invariánst definiálhatunk. Legyen

$$\varphi \leftrightarrow (\eta, y, x, \xi) \in \mathbb{C} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathcal{J} \oplus \mathbb{C} \equiv \mathcal{W}(\mathcal{J}). \quad (4.78)$$

Vezessük be először a kényelmesebb

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \equiv \frac{1}{3}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3], \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{W}(\mathcal{J}) \quad (4.79)$$

jelölést és az új

$$\tilde{\varphi} \equiv \varphi \varphi \varphi \quad (4.80)$$

mennyiséget. Ekkor (4.15) új alakja

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \varphi_1\varphi_3\varphi_2 + \frac{2}{3}\{\varphi_2, \varphi_3\}\varphi_1 - \frac{1}{3}\{\varphi_3, \varphi_1\}\varphi_2 - \frac{1}{3}\{\varphi_1, \varphi_2\}\varphi_3 \quad (4.81)$$

a többi axióma változatlan.

A (4.32) szimplektikus formával $\tilde{\varphi}$ -t kombinálva képezhetjük a φ komponenseiben negyedfokú

$$\mathcal{D}(\varphi) \equiv \{\varphi, \tilde{\varphi}\} \quad (4.82)$$

polinomot. Az irodalomban megszokott a (η, y, x, ξ) mennyiségeket formálisan egy mátrixba szervezni [Kru07] ezzel a felírással kapjuk, hogy

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \tilde{y} \\ \tilde{x} & \tilde{\eta} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\xi\kappa - \text{Det } x & -(\eta x^\# - 2x \times y^\#) + \kappa y \\ (\xi y^\# - 2y \times x^\#) - \kappa x & \eta\kappa + \text{Det } y \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

ahol

$$\kappa \equiv \frac{1}{2}(\eta\xi - (x, y)). \quad (4.84)$$

A negyedfokú polinom explicit alakja

$$\mathcal{D}(\varphi) = 4[\kappa^2 - (x^\#, y^\#) + \xi \text{Det } y + \eta \text{Det } x]. \quad (4.85)$$

Ez a formula már ismerős számunkra. Valóban, (3.69)-ben és (3.224)-ben a hat módusú három-fermion rendszerek összefonódottsági mértékeként pontosan ezt a formulát használtuk¹¹. Ezek a formulák most új szerepben mint a $\mathcal{W}(\mathcal{J}_{\mathbb{C}})$ és $\mathcal{W}(\mathcal{J}_{\mathbb{H}})$ Freudenthal-rendszerek fundamentális kvartikus polinomjai bukkannak fel. A (3.68) transzformációs szabályból és a (4.60) izomorfizmusokból tudjuk, hogy ezek a polinomok $SL(6, \mathbb{C}) \simeq \text{Conf}(\mathcal{J}_{\mathbb{C}})$ illetve $\text{Spin}(12, \mathbb{C}) \simeq \text{Conf}(\mathcal{J}_{\mathbb{H}})$ invariáns mennyiségek. Ennek alapján várjuk, hogy bármely köbös Jordan algebrán alapuló Freudenthal-rendszerre (4.85) $\text{Conf}(\mathcal{J})$ invariáns. Belátható [Kru07], hogy a fenti kvartikus polinom valóban egy $\text{Conf}(\mathcal{J})$ invariáns¹². Könnyen belátható az is, hogy a $\{\cdot, \cdot\}$ szimplektikus forma is invariáns a $\text{Conf}(\mathcal{J})$ csoportra nézve. Összefoglalva tehát írható, hogy

$$\mathcal{D}(g\varphi) = \mathcal{D}(\varphi), \quad \{g\varphi_1, g\varphi_2\} = \{\varphi_1, \varphi_2\}, \quad g \in \text{Conf}(\mathcal{J}), \quad \varphi \in \mathcal{W}(\mathcal{J}). \quad (4.86)$$

Tekintsük most a $\mathcal{K}_{\varphi\varphi}\tilde{\varphi} = \varphi\varphi(\varphi\varphi\varphi)$ mennyiséget[MQS⁺13]. Ekkor a (4.16), (4.14) definíciókból azonnal következik, hogy

$$\mathcal{K}_{\varphi\tilde{\varphi}}\varphi = \mathcal{K}_{\tilde{\varphi}\varphi}\varphi = 0 \quad (4.87)$$

Ebből adódik, hogy a $\mathcal{K}_{\varphi\tilde{\varphi}} = \mathcal{K}_{\tilde{\varphi}\varphi}$ operátor φ tetszőleges hatványát eltünteti. Speciálisan igaz az, hogy $\mathcal{K}_{\varphi\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi} = 0$. Mindezeket az alábbi módon foglalhatjuk össze

$$\varphi\tilde{\varphi}\varphi = \tilde{\varphi}\varphi\varphi = \varphi\tilde{\varphi}\tilde{\varphi} = \varphi\tilde{\varphi}\tilde{\varphi} = 0 \quad (4.88)$$

Számoljuk most ki a $\mathcal{K}_{\varphi\varphi}\tilde{\varphi} = \varphi\varphi\tilde{\varphi}$ és $\mathcal{K}_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}\varphi = \tilde{\varphi}\tilde{\varphi}\varphi$ mennyiségeket! A (4.81) axióma és a (4.82) definíció felhasználásával kapjuk, hogy

$$\varphi\varphi\tilde{\varphi} = \mathcal{D}(\varphi)\varphi, \quad \tilde{\varphi}\tilde{\varphi}\varphi = -\mathcal{D}(\varphi)\tilde{\varphi}. \quad (4.89)$$

Ezt felhasználhatjuk $\tilde{\tilde{\varphi}} = \tilde{\varphi}\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}$ kiszámolására

$$\tilde{\tilde{\varphi}} = -\mathcal{D}^2(\varphi)\varphi. \quad (4.90)$$

Ebből és (4.82)-ből következik az is, hogy

$$\mathcal{D}(\tilde{\tilde{\varphi}}) = \mathcal{D}^3(\varphi). \quad (4.91)$$

¹¹ A három-qubit rendszerekkel kapcsolatos (2.92) Cayley-féle hyperdetermináns is (4.85) alakú.

¹²Érdemes a (4.80), (4.82) definíciókat összevetni a hatmódusú fermionrendszerre kapott (3.75) és (3.73) formulákkal. Ezek a formulák egy $-1/2$ faktortól eltekintve megegyeznek. Ennek az eredetét lásd a (4.32) definícióban. Ugyanis a hatmódusú fermionrendszerre használt (3.71) szimplektikus forma a (4.32)-ben szereplő $(\cdot|\cdot)$ formának felel meg.

Definiáljuk a φ Freudenthal duáltját [BDDR09]

$$\hat{\varphi} \equiv \frac{\tilde{\varphi}}{\sqrt{-\mathcal{D}(\varphi)}}. \quad (4.92)$$

Ekkor (4.90)-(4.91) felhasználásával belátható, hogy

$$\hat{\hat{\varphi}} = -\varphi, \quad \mathcal{D}(\hat{\varphi}) = \mathcal{D}(\varphi). \quad (4.93)$$

Figyeljük meg, hogy a Freudenthal duált speciális esetben megegyezik a (3.76)-(3.77)-ben bevezetett duális fermion állapot fogalmával. Fontos látni azt is, hogy a fenti identitásokat most a konkrét realizációtól függetlenül a hármasszorzat (4.14)-(4.16) axiómáiból közvetlenül vezettük le.

A fejezet lezárásaként, az alábbi táblázatban, összefoglaljuk az összefonódottsággal kapcsolatos Freudenthal rendszereket.

Típus	G	$ \mathfrak{g} $	$m = \dim \mathcal{W}(\mathcal{J})$	$2m + \mathfrak{g} + 3$
Három bozonikus qubit	$SL(2, \mathbb{C})^{\times 3}_{\text{diag}}$	3	$4 = 1 + 1 + 1 + 1$	14
Három qubit	$SL(2, \mathbb{C})^{\times 3}$	9	$8 = 1 + 3 + 3 + 1$	28
Három fermion hat szimpl.módus	$Sp(6, \mathbb{C})$	21	$14 = 1 + 6 + 6 + 1$	52
Három fermion hat módus	$SL(6, \mathbb{C})$	35	$20 = 1 + 9 + 9 + 1$	78
Ps./ptl. fermion hat módus	$Spin(12, \mathbb{C})$	66	$32 = 1 + 15 + 15 + 1$	133
?	$E_7(\mathbb{C})$	133	$56 = 1 + 27 + 27 + 1$	248

4.1. táblázat. Freudenthal rendszerek mint speciális összefonódott rendszerek. A táblázatban szereplő összefonódott rendszerek teljes SLOCC csoportja $GL(1, \mathbb{C}) \times G$ alakban áll elő. A $|\mathfrak{g}|$ a G Lie algebrájának dimenziója, azaz a *nemtriviális* komplex SLOCC paraméterek száma. Az m szám a (4.54) alakban particionált $\mathcal{W}(\mathcal{J})$ Freudenthal rendszer komplex dimenziója, azaz az összefonódott rendszer komplex amplitúdóinak a száma. A táblázat 4.-7. sorában \mathcal{J} Jordan algebrák rendre $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{J}_{\mathbb{H}}$ és $\mathcal{J}_{\mathbb{O}}$. A 2.-3. sorban a megfelelő Jordan algebrák a (4.36) kanonikus alak diagonális elemekre történő alkalmas leszűkítésével kaphatók. Figyeljük meg, hogy a $2m + |\mathfrak{g}| + 3$ számok rendre a \mathfrak{g}_2 , $\mathfrak{so}(8)$, \mathfrak{f}_4 , \mathfrak{e}_6 , \mathfrak{e}_7 és \mathfrak{e}_8 komplex Lie algebrák dimenziójai[Cle03].

5. FEJEZET

A fekete-lyuk/qubit megfelelés

5.1. Bevezetés

A dolgozat első felét kitevő fejezetekben egyszerű összefonódott rendszerek geometriáját tanulmányoztuk. A dolgozat második felében szeretnénk megmutatni, hogy ezek a rendszerek mint a húrelméletekből ismeretes fekete-lyuk megoldásokkal kapcsolatos matematikai struktúrák bukkannak fel. Ebben a bevezető jellegű fejezetben nagy vonalakban vázoljuk a FLYQM okait. A dolgozat hátralévő része ezen okok részletes analízise.

A Fekete-lyuk/qubit megfelelésnek (FLYQM) nevezett matematikai kapcsolat [BDL12] egyik oka a megfelelés két oldalán felbukkanó fizikai szituációk hasonló szimmetriája. A megfelelés egyik oldalán a SLOCC csoportok, a másikon az úgynevezett U-dualitási csoportok állnak. Mivel a két oldalon álló szimmetriacsoportok hasonlóak, ezért a FLYQM természetes oka ábrázoláselméleti.

Másrészt, a FLYQM-ben felbukkanó összefonódott rendszerek legtöbbje nagyon speciális Freudenthal rendszer. A Freudenthal rendszerek (lásd (4.1) táblázat) egyik specifikuma az, hogy ezekre csak egy algebrailag független relatív invariáns polinom létezik. Mindezek fontos következménye az, hogy mivel a szemiklasszikus fekete-lyuk kontextusban is csak egy algebrailag független U-dualitási invariáns létezik ezért a szemiklasszikus entrópiaformula a megfelelő összefonódottsági mérték függvénye kell, hogy legyen.

Általában a relatív invariáns entrópiaformula unicitása azzal kapcsolatos, hogy a megfelelő összefonódott rendszerek állapottere egy reguláris irreducibilis prehomogén vektortér [SK77]. A prehomogenitás fogalom egy G csoport, egy V vektortér, és G egy V -n ható \mathcal{R} irreducibilis ábrázolásának olyan (G, V, \mathcal{R}) hármasára utal, melyre V -ben létezik G -nek sűrű¹ pályája. Amennyiben G a SLOCC transzformációk csoportja, a pályák a SLOCC összefonódottsági osztályok. A prehomogenitás ekkor azt jelenti, hogy létezik egy speciális, sűrű SLOCC összefonódottsági osztály. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy bármely állapot tetszőleges környezetében találhatunk ebből a speciális osztályból elemet. Ilyen sűrű SLOCC osztály például a 4.2 fejezetben tárgyalt három bozonikus qubit GHZ-osztálya. Ekkor az egyetlen algebrailag független relatív invariáns a Cayley hiperdetermináns (4.5) bozonikus változata.

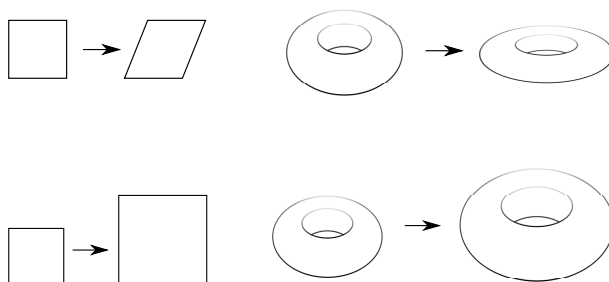
A FLYQM-ben előforduló rendszerek nagyrészt, olyan reguláris irreducibilis prehomogén vektortértereken alapulnak, melyek csoportja $G = \mathbb{C}^\times \times G_{ss}$ alakú, azaz a G nemtriviális része féligegyszerű. Ezeken a vektortereken létező egyértelmű relatív invariáns itt azt teszi lehetővé [Hit00, Hit03, Hit01, RSAC05], hogy olyan invariáns funkcionálokat írjunk fel melyek kritikus pontjai a húrelméleti kompaktifikációkkal kapcsolatos 6, 7 és 8 extra dimenziós sokaságok speciális geometriai struktúráit adják. Például, a húrelméletekben fontos szerepet játszó Calabi-Yau sokaságok olyan hat dimenziós Kähler sokaságok, melyeken létezik egy seholsem eltűnő holomorf háromforma. Megmutatható [15], hogy ez a háromforma mely a Calabi-Yau komplex struktúráját definiálja, megkapható mint egy olyan invariáns funkcionál kritikus pontja mely épp a (3.67) sűrű pályán értelmezett háromfomákkal kapcsolatos összefonódottsági invariánsan alapul. Ebben a képben tehát egy hat dimenziós valós irányítható sokaság extra struktúráját

¹A Zariski topológiában.

(jelen esetben a komplex struktúrát), a sűrű pályán vett háromformából képzett funkcionálból származtathatjuk. Hasonló konklúzióra jutunk ha Calabi-Yau sokaságok Kähler struktúráival kapcsolatos funkcionálokat tekintünk. Kiderül, hogy ezen a funkcionáloknak alapjául is olyan invariánsok szolgálnak [RSAC05] melyek összefonódottsági mértékekkel kapcsolatosak [15].

5.2. Attraktorok, fekete lyukak, és qubitek

Miért fontosak a fekete lyukak fizikájában az extra dimenziókkal kapcsolatos sokaságok komplex és Kähler struktúrái? A komplex struktúrák az extra dimenziók alakjának, a Kähler struktúrák pedig a térfogatának kvantumozott fluktuációit jellemzik. Például a következő ábrákon a kétdimenziós tórusz ilyen deformációi láthatók². Ezeket a deformációkat a sokaság kohomoló-



giájával kapcsolatos paraméterek jellemzik. Például a kétdimenziós tórusz esetén, a deformált tóruszt reprezentáló paralelogramma oldalai 1 és τ , ahol $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ egy a felső félsíkon fekvő komplex szám. Mivel a paralelogramma területe τ képzetes részével egyenlő, ezért τ_2 egy Kähler paraméter.

Az alacsonyenergiás négydimenziós térelméleti képben a fenti deformációs paraméterek mint a téridőn értelmezett skalárterek jelennek meg. Ez annak felel meg, hogy az extra dimenziók alakja és mérete a téridőn helyről-helyre változhat. Az irodalomban ezeket a tereket modulustereknek nevezik. A legegyszerűbb kompaktifikációs sémák alkalmazása után, a modulusterek az effektív négydimenziós Lagrange függvényben csak kinetikus jellegű tagokban jelennek meg, rájuk nem indukálódik potenciál.

A kompaktifikáció után kapható effektív elmélet fekete lyuk megoldásainak Bekenstein-Hawking-féle szemiklasszikus entrópiája az eseményhorizont területének egynegyede [Bek73a, Haw75a] (Planck-hossz négyzet egységeiben). A fentiek értelmében azonban az entrópia nemcsak a kvantált töltésektől³, hanem a folytonosan változtatható modulusterek horizonton felvett értékeitől is függhet. Ez egy nyugtalanító lehetőség. Egy statisztikus mechanikán iskolázott elme ugyanis azt várja, hogy az entrópia diszkrét kvantum állapotok számának logaritmusával arányos. A húrelmélet célkitűzése az állapotok leszámolásán alapuló mikroszkópikus és a geometrián alapuló makroszkópikus kép precíziós egyezésének demonstrálása. A mikroszkópikus értelmezés fenti koncepciójával azonban az entrópiának a folytonosan változtatható modulus paraméterektől való függése nem egyeztethető össze. A skalárterekre vonatkozó téregyenletek ugyanis olyan radiális evolúciót írnak le melyre az aszimptotikusan Minkowski tartományban lerögzített kiinduló modulustér értékek különböző horizonton felvett végértékeket szolgáltatnak. Mivel a modulusterek

²A kiindulási tóruszt egy olyan egységnyi oldalú négyzettel reprezentáltuk melynek átellenes oldalait azonosítjuk. A deformációk során a négyzet paralelogrammává vagy nagyobb felületű négyzetté alakul.

³A fekete lyukakat csak a tömegük, a töltésük és az impulzusmomentumuk jellemzi. Az általunk vizsgált megoldásokra az impulzusmomentum zérus. Amennyiben a fekete lyuk megoldás még szuperszimmetrikus is akkor a fekete lyuk tömege és töltései között kapcsolat áll fenn. Ekkor az entrópia kizárólag csak az elektromos és a mágneses töltések kvantált értékeitől függhet.

nem rendelkeznek a Lagrange függvényben előforduló potenciállal ezért első ránézésre nem világos hogy a modulusterek a horizonton egy speciális értéken hogyan stabilizálódnak. Ráadásul ez a stabilizációs folyamat úgy kell hogy végbemenjen, hogy az eredményül kapott modulusterek horizonton felvett értékei a diszkrét értékeket felvevő töltések függvényeiként álljanak elő.

1995-ben a Ferrara-Kalosh-Strominger trió megmutatta [FKS95], hogy szuperszimmetrikus fekete lyuk megoldások esetén a modulusterek radiális evolúciója egy attraktort ír le⁴. Ez azt jelenti, hogy a modulusterek evolúcióját bármilyen aszimptotikus kezdőfeltétellel indítjuk, az eseményhorizonton felvett érték mindig ugyanaz lesz. Kiderült az is, hogy ez az úgynevezett attraktor mechanizmus olyan stabilizációs egyenletekre vezet melyek a kvantált töltések függvényében a modulusterek horizonton felvett értékeit is megadják. Ez a felfedezés lehetővé tette azt, hogy a Bekenstein-Hawking féle entrópiaformulának a későbbiekben mikroszkópikus értelmezését adják [AS96].

A szuperszimmetrikus attraktor mechanizmus összekapcsolja az extra dimenziók geometriáját a téridő sokaság geometriájával. Ennek eredményeképp a fekete lyuk eseményhorizontja a téridő egy olyan tartománya, melynek minden pontjában egy igen speciális alakú extra dimenziós sokaság található. A stabilizációs egyenleteknek köszönhetően ennek a speciális alaknak megfelelő modulustér értékek az elektromos és a mágneses töltések kvantált értékeitől függenek. A húrelmélet szerint a kvantált töltések az extra dimenziós homológia ciklusokra feltekeredő hurok és membránok csavarodási számával kapcsolatosak. Az attraktor mechanizmus értelmében tehát a hurok és membránok csavarodási konfigurációi az aszimptotikus konfigurációkkal kapcsolatos részletektől függetlenül pontosan meghatározzák a fekete lyuk geometriáját, s így például az eseményhorizont felületét. Az eseményhorizont felülete a fekete lyuk entrópiájának szemiklasszikus közelítését adja, tehát a fekete lyuk entrópiáért felelős mikroállapotok problémája az extra dimenziók homológiájának és a hurok és membránok dinamikájának kapcsolatában keresendő.

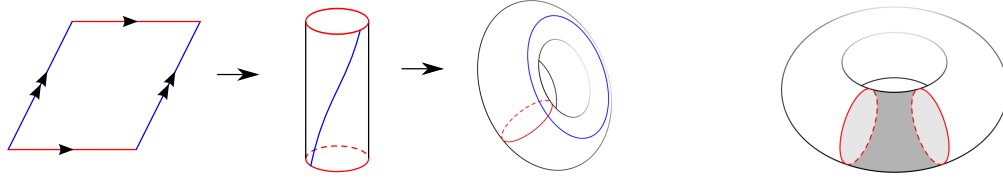
A fentiekben vázlatosan ismertetett attraktor mechanizmus IIB típusú húrelmélet hat dimenziós T^6 tóruszra történő kompaktifikációja esetén érdekes eredményre vezet. Ebben az esetben az effektív négydimenziós kép elektromos és mágneses töltéskonfigurációit három dimenziós membránoknak, T^6 háromdimenziós homológia ciklusaira történő csavarodásai szolgáltatják. A modell T^6 -ról $T^2 \times T^2 \times T^2$ -re történő konzisztens csonkítása az úgynevezett STU modell. A modell nevét onnan kapta, hogy a három T^2 tórusz mindegyikének térfogatőrző deformációi egy komplex modulus paraméterrel jellemezhetők, melyek három komplex skalártér S , T és U megjelenésére vezetnek. A három dimenziós homológia ciklusok száma ebben az esetben nyolc, ezért a három bránok csavarodási konfigurációit a $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ elemeivel kapcsolatos nyolc egész szám jellemzi. Egy rögzített csavarodási konfiguráció egy olyan három-qubit állapotra emlékeztet melynek amplitúdói egész számok: a csavarodási számok. "Csavarodni vagy nem csavarodni, ez itt a qubit [BDD⁺08]." A kérdés már csak az, hogyan lehet a fenti igencsak költői⁵ képet matematikailag precízebbé tenni?

5.3. Qubitek és toroidális geometria

5.3.1. Egy qubit és a tórusz [9]. Egy két dimenziós T^2 tóruszt egy olyan négyzettel reprezentálhatunk melynek átellenes oldalait azonosítjuk. Ebben a képben a deformált tórusznak egy parallelogramma felel meg. Legyenek a deformáltlan tórusz koordinátái u és v ahol $u \sim$

⁴Az evolúció szó jelentése itt radiális evolúcióra utal. A szokásos értelemben vett időbeli evolúcióról nem beszélhetünk hiszen az általunk vizsgálandó megoldások ebben a fejezetben statikusak lesznek.

⁵A [BDD⁺08] publikációban M. J. Duff és munkatársai a qubitek és csavarodási számok kapcsolatának lehetőségét meglehetősen elnagyoltan bontják ki. Így például a cikkben nem derül ki, hogy mi a fizikai eredete azoknak a megfigyelhető mennyiségeknek melyek egy három-qubit Hilbert téren hatnak. A [BDD⁺08] dolgozatban ezen Hilbert tér struktúrájának eredete is tisztázatlan marad.



5.1. ábra. Bal oldalon: így keletkezik a tórusz. Jobb oldalon: a homológia szemléltetése

$u + 1, v \sim v + 1$ (5.1 ábra). A tórusz deformációit jellemző komplex paraméter legyen

$$\tau \equiv x - iy, \quad y > 0. \quad (5.1)$$

A deformált tórusz "térfogata" y , a τ/\sqrt{y} paraméter a tórusz térfogatörző deformációival kapcsolatos. A matematikai irodalomból ismert, hogy a τ paraméter a tórusz komplex struktúráival kapcsolatos [Ima92]. A szokatlan konvenció melynek során a deformációs paraméter képzetes részét negatívnak választjuk elterjedt a szupergravitációs irodalomban [BFMY08, GLS08a]. A deformációs paraméter a komplex alsó félsík, a tórusz Teichmüller tere⁶. Ismeretes, hogy a Teichmüller tér pontjai még nem reprezentálnak inekvivalens komplex struktúrákat. Az inekvivalens komplex struktúrák terét úgy kapjuk, hogy a Teichmüller teret lefaktorizáljuk a $PSL(2, \mathbb{Z})$ moduláris csoporttal, ekkor az úgynevezett moduláris tartományt kapjuk [Ima92]. A deformált tórusz komplex koordinátája a τ moduláris paraméterrel kifejezve a $z \equiv u + \tau v$ alakot ölti.

A T^2 tórusz két ciklusa (zárt görbéje) homológ ha T^2 -nek létezik olyan kétdimenziós tartománya melyet ez a két ciklus határol. Az 5.1 ábráról láthatóan a tórusz két nemtriviális bázis homológiaciklussal rendelkezik, melyek a kék és piros ciklusok. Legyen ez a két ciklus A és B . Adjunk irányítást ezeknek a ciklusoknak és legyenek a metszési számok az alábbiak: $A \cap B = -B \cap A := 1$ és $A \cap A = B \cap B = 0$. Ezeket a metszési tulajdonságokat őrző csoport az $Sp(2, \mathbb{Z}) \simeq SL(2, \mathbb{Z})$. Minden csavarodási konfigurációt jellemezhetünk két egész számmal, azaz a megfelelő homológia csoport szerkezete az alábbi $H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Ennek a csoportnak egy tetszőleges elemét a $C = pB + qA$ alakba írjuk, ahol a csavarodási számok $(q, p) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Legyen $\alpha = du$, és $\beta = dv$ illetve $\int_{T^2} \alpha \wedge \beta = 1$. Ekkor a Poincaré dualitás miatt $H^{d-k}(M, \mathbb{Z}) \simeq H_k(M, \mathbb{Z})$ ezért ezeknek a csavarodási konfigurációknak a jellemzésére használhatjuk a kanonikus α és β bázis egy-formákkal ellátott $H^1(T^2, \mathbb{Z})$ kohomológiacsoportot is. Egy kohomológiaosztály tetszőleges $\Gamma \in H^1(T^2, \mathbb{R})$ reprezentánsa az alábbi alakba írható

$$\Gamma = p\alpha + q\beta. \quad (5.2)$$

Mivel [JHS07]

$$\int_{T^2} \xi \wedge \eta = - \left(\int_A \xi \int_B \eta - \int_B \xi \int_A \eta \right) \quad (5.3)$$

a csavarodási számokat az alábbi módon is megkaphatjuk⁷

$$p = \int_A \Gamma, \quad q = - \int_B \Gamma. \quad (5.4)$$

A következőkben a célunk az, hogy Γ -t a deformált tóruszhoz illesztett alkalmas bázisban írjuk fel. Ehhez első lépésben az (u, v) koordináták helyett a (z, \bar{z}) koordinátákat használjuk ahol $z = u + \tau v$. Ekkor a fenti komplex lineáris kombinációk használatával $H^1(T^2, \mathbb{Z})$ -t a $H^1(T^2, \mathbb{C})$

⁶A matematikai irodalomban a felső félsík használata a megszokott.

⁷ $\int_A \alpha = - \int_B \beta = 1$

kohomológia csoportba beágyazva képzeljük el. A $H^1(T^2, \mathbb{C}) = H^{(1,0)}(T^2, \mathbb{C}) \oplus H^{(0,1)}(T^2, \mathbb{C})$ felbontásnak megfelelően új, holomorf és antiholomorf, bázisvektorokat választhatunk

$$\Omega_0 = dz = du + \tau dv \equiv \alpha + \tau\beta, \quad \bar{\Omega}_0 = d\bar{z} = du + \bar{\tau}dv. \quad (5.5)$$

Ismeretes [Ima92], hogy a tórusz komplex struktúra deformációival kapcsolatos Teichmüller téren megadható egy metrika (Weil-Petersson metrika) mely épp a komplex fűsík

$$ds^2 = \frac{1}{2y^2}(dx^2 + dy^2) = 2G_{\tau\bar{\tau}}d\tau d\bar{\tau} \quad (5.6)$$

Poincaré metrikájával egyezik meg⁸. A fenti metrika Kähler azaz $G_{\tau\bar{\tau}} = \partial_{\tau}\partial_{\bar{\tau}}\mathcal{K} = \frac{1}{4y^2}$ ahol a Kähler potenciál

$$\mathcal{K} = -\log(2y). \quad (5.7)$$

Az (5.5) holomorf egy-forma segítségével

$$ie^{-\mathcal{K}} = \int_{T^2} \Omega_0 \wedge \bar{\Omega}_0. \quad (5.8)$$

Vegyük észre, hogy a deformált tórusz

$$\omega = id\bar{z} \wedge dz \quad (5.9)$$

térfogati formájára teljesül, hogy

$$e^{-\mathcal{K}} = \int_{T^2} \omega. \quad (5.10)$$

Nyilván az $e^{-\mathcal{K}}$ tag jelenléte azt mutatja, hogy az $(u, v) \mapsto (z, \bar{z})$, $z = u + \tau v$ deformáció nem őrzi a térfogatot. Térfogatörző deformációk tekintéséhez ezzel a faktorról renormálnunk kell⁹. Vegyük észre, hogy (5.8) miatt a

$$\Omega_0 \mapsto e^{f(\tau)}\Omega_0 \quad (5.11)$$

Kähler transzformáció megváltoztatja a Kähler potenciált

$$\mathcal{K}(\tau, \bar{\tau}) \mapsto \mathcal{K}(\tau, \bar{\tau}) - f(\tau) - \bar{f}(\bar{\tau}) \quad (5.12)$$

de változatlanul hagyja az (5.6) Kähler metrikát.

Az ω térfogati forma segítségével definiálhatjuk a Hodge-féle csillag operációt melynek egyformákon történő hatása az alábbi formulából kikövetkeztethető

$$(\varphi, \varphi)\omega = \varphi \wedge *\bar{\varphi}. \quad (5.13)$$

Például $\varphi = \Omega_0 = dz$ -ra és konjugáltjára $((\varphi, \varphi) = 1)$ kapjuk¹⁰, hogy

$$*dz = idz, \quad *d\bar{z} = -id\bar{z}. \quad (5.14)$$

Definiáljuk most az

$$\Omega \equiv e^{\mathcal{K}/2}\Omega_0 \quad (5.15)$$

renormált (nem holomorf) egy-formát. Ekkor a

$$(\bar{\tau} - \tau)(\partial_{\tau} + \partial_{\bar{\tau}}\mathcal{K})dz = d\bar{z}, \quad \partial_{\tau}d\bar{z} = 0 \quad (5.16)$$

relációk miatt kapjuk, hogy

$$D_{\bar{\tau}}\Omega = \bar{\Omega}, \quad D_{\bar{\tau}}\bar{\Omega} = 0, \quad (5.17)$$

⁸A sokaságok komplex struktúráinak deformációit a 7. fejezetben részletesebben tárgyaljuk.

⁹ $\int_{T^2} du \wedge dv = e^{\mathcal{K}} \int_{T^2} \omega = 1$.

¹⁰ (φ, φ) tetszőleges (m, n) típusú formára felírt explicit alakját illetően lásd [Kod05].

ahol az Ω -n ható $D_{\bar{\tau}}$ "lapos" ¹¹ kovariáns deriváltat a

$$D_{\bar{\tau}}\Omega \equiv (\bar{\tau} - \tau)D_{\tau}\Omega \equiv (\bar{\tau} - \tau) \left(\partial_{\tau} + \frac{1}{2}\partial_{\tau}\mathcal{K} \right) \Omega = \bar{\Omega} \quad (5.18)$$

és az $\bar{\Omega}$ -n ható párját a

$$D_{\bar{\tau}}\bar{\Omega} \equiv (\bar{\tau} - \tau) \left(\partial_{\tau} - \frac{1}{2}\partial_{\tau}\mathcal{K} \right) \bar{\Omega} = 0 \quad (5.19)$$

egyenletek definiálják. A fenti deriváltak kovariánsak abban az értelemben, hogy az $\Omega \mapsto e^{(f-\bar{f})/2}\Omega$ Kähler transzformáció során ¹² $D_{\bar{\tau}}\Omega \mapsto e^{(f-\bar{f})/2}D_{\bar{\tau}}\Omega$.

Figyeljük meg, hogy (5.14) miatt az $i\Omega$ és $i\bar{\Omega}$ renormált bázisvektorokon a Hodge csillag operáció az alábbi módon hat

$$*(i\Omega) = i(i\Omega), \quad *(i\bar{\Omega}) = -i(i\bar{\Omega}). \quad (5.20)$$

Ebben a Hodge csillag diagonális bázisban a Γ az alábbi alakot ölti

$$\Gamma = -e^{\mathcal{K}/2}(p\bar{\tau} - q)i\Omega + e^{\mathcal{K}/2}(p\tau - q)i\bar{\Omega}. \quad (5.21)$$

A következő lépésként a deformált tórusz egy-formáinak terét speciális tulajdonságú qubitok tereként interpretáljuk. Ehhez először az egy-formák terét egy Hermitikus belső szorzattal látjuk el

$$\langle \xi | \eta \rangle \equiv \int_{T^2} \xi \wedge * \bar{\eta} \quad (5.22)$$

majd az alábbi megfeleltetéssel

$$i\Omega \leftrightarrow |0\rangle \quad i\bar{\Omega} \leftrightarrow |1\rangle \quad (5.23)$$

összekapcsoljuk a két teret. Könnyen ellenőrizhető hogy $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ és $\langle 0|1\rangle = \overline{\langle 1|0\rangle} = 0$. Fizikai szempontból a $|0\rangle$, $|1\rangle$ bázisvektorok mindkét képben kitüntetett szerepet játszanak. A kvantum információelméleti képben a fenti bázisvektorok az úgynevezett "számítási" (computational) bázis szerepét játszik [NC00].

Ezen a ponton egy fontos megjegyzést kell tennünk. A kvantum információelméletben a $|0\rangle$ és $|1\rangle$ jelölések egy két dimenziós komplex vektortér két bázisvektorára utalnak. A Hilbert tér $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$, ellátva a szokásos Hermitikus belső szorzattal. Esetünkben azonban a $|0\rangle$ és $|1\rangle$ bázisvektorok implicit módon függenek a τ deformációs paramétertől. Helyesebb lenne tehát a $|0, \tau\rangle$, $|1, \tau\rangle$ jelölés mely arra utal, hogy esetünkben nem egy Hilbert térről van szó hanem Hilbert terek τ -val parametrizált seregéről. Vakóban, a $\tau = x - iy$ -val parameterizált Hilbert terek (5.22) skalárszorzat az (u, v) tórusz koordinátákra történő integrálás definiálja. A skalárszorzat azonban függ a Hodge féle csillag operációtól a Hodge csillag operáció pedig függ az alkalmazott metrikától ami pedig a deformált tórusz metrikáján keresztül a modulusparamétertől. A helyzet emlékeztet a molekuláris Born-Oppenheimer módszerre ahol két különböző fajta konfigurációs terünk van: az elektronok (u, v) és a magok (x, y) koordinátáival fémjelzett "gyors" illetve "lassú" változók konfigurációs tere. Az elektron koordinátákra történő kiintegrálás (a toroidális extra dimenzióra történő "kiátlagolás") után a magok mozgására (modulus terekre) egy effektív klasszikus dinamikát kapunk ¹³. Az attraktor mechanizmus majdani tárgyalásánál ez lesz az a dinamika mely a modulusstabilizációnál kulcsfontosságú szerepet fog játszani. Az (5.18)-(5.19) egyenletek által definiált kovariáns deriváltak olyan operátoroknak tekinthetők melyek a lassú változók (modulus paraméterek) szerinti deriváltakat tartalmaznak. Hasonlóan mivel a Hodge

¹¹A "lapos" kifejezés eredetét illetően figyeljük meg, hogy az (5.6) metrika a $\frac{1}{(\bar{\tau}-\tau)^2}$ -vel arányos konform faktortól eltekintve lapos.

¹²A (5.12) szabály miatt amennyiben $\Omega_0 \mapsto e^f \Omega_0$ akkor $\Omega \mapsto e^{(f-\bar{f})/2} \Omega$.

¹³A molekulafizikában és esetünkben is, természetesen még megkvantálhatjuk az effektív "lassú" dinamikát is. Mi most ettől tartózkodunk.

csillag is függ a modulusterektől ezért a csillag operációt is olyan operátornak tekinthetjük mely a lassú változókkal kapcsolatos. A konstrukciónk pikantériája abban áll, hogy jóllehet ezek az operátorok a lassú változókkal kapcsolatosak, ezek az operátorok a gyors változókkal kapcsolatos egyszerű operátorokként (σ_+ , σ_- és $i\sigma_3$) is interpretálhatók. Valóban, ha a továbbiakban is a $|0\rangle$ és $|1\rangle$ egyszerűbb jelölést használjuk akkor a (5.18)-(5.19) és a (5.20) egyenletek az egyszerű

$$\sigma_+|0\rangle = |1\rangle, \quad \sigma_+|1\rangle = 0 \quad (5.24)$$

$$\sigma_-|1\rangle = |0\rangle, \quad \sigma_-|0\rangle = 0, \quad (5.25)$$

$$i\sigma_3|0\rangle = i|0\rangle, \quad i\sigma_3|1\rangle = -i|1\rangle \quad (5.26)$$

alakot öltik. Matematikai szempontból ezek az operációk az $SL(2, \mathbb{C})$ SLOCC részcsoporthoz tartoznak, generátorait adják, kvantum információelméleti szempontból pedig a qubiten ható projektív bit flip (σ_\pm) és fázis flip ($i\sigma_3$) "hibák"-ként interpretálhatók.

A (5.23) megfelelést használva az (5.21) Γ kohomológia osztályt egy $|\Gamma\rangle$ qubitnek feleltethetjük meg

$$|\Gamma\rangle = \Gamma_0|0\rangle + \Gamma_1|1\rangle, \quad \Gamma_1 = -\bar{\Gamma}_0 = e^{\mathcal{K}/2}(p\tau - q). \quad (5.27)$$

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a fenti jelölés ugyan kényelmes de explicit módon nem hangsúlyozza azt hogy nemcsak a Γ_0 és Γ_1 amplitúdók, hanem a számítási bázisvektorok is függenek a τ moduláris paramétertől. Könnyen belátható, hogy a $\Gamma_1 = -\bar{\Gamma}_0$ feltételt változatlanul ható transzformációk az $SL(2, \mathbb{C})$ SLOCC csoport $SU(1, 1)$ részcsoporthoz tartoznak. Mivel ez a csoport a SLOCC csoport egyik valós alakja ezért a $\Gamma_1 = -\bar{\Gamma}_0$ feltételre mint "valósági feltétel"-re fogunk utalni. Köztudott, hogy az $SU(1, 1)$ és $SL(2, \mathbb{R})$ csoportok mindegyike a komplex SLOCC csoport valós alakja. Azt is tudjuk, hogy $SL(2, \mathbb{R})$ épp a rebiteket jellemző valós SLOCC csoport, ezért az (5.27) reprezentáció rebiteket qubitokba történő speciális komplex beágyazásának is tekinthető.

Vegyük észre, hogy $|\Gamma\rangle$ nem normált, a norma négyzet

$$||\Gamma||^2 = \langle \Gamma | \Gamma \rangle = 2e^{\mathcal{K}}|p\tau - q|^2 = \frac{1}{y}|p\tau - q|^2 \quad (5.28)$$

Figyeljük meg, hogy $||\Gamma||^2$ egyszerre unitér és $SL(2, \mathbb{R})$ invariáns. Az utóbbi azt jelenti, hogy a kombinált

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1 \quad (5.29)$$

transzformációk során a normanégyzet invariáns marad.

A $|\Gamma\rangle$ állapotot a számítási (Hodge diagonális) bázisban két komponensű vektorként is tekinthetjük

$$\begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2y}} \begin{pmatrix} -\bar{\tau} & 1 \\ \tau & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -i & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} \begin{pmatrix} y & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

A fenti formula az

$$|\Gamma\rangle = \mathcal{S}|\gamma\rangle = \mathcal{U}\mathcal{S}|\gamma\rangle, \quad |\gamma\rangle = p|0\rangle + q|1\rangle \quad (5.31)$$

"operátoros" alakba írható. A (5.30) jobb oldalának első mátrixa unitér a második az $SL(2, \mathbb{R})$ csoport eleme. Az unitér mátrixot egy olyan bázistranszformáció mátrixának tekinthetjük mely az $SL(2, \mathbb{C})$ két különböző valós alakja ($SL(2, \mathbb{R})$ és $SU(1, 1)$) között teremt kapcsolatot¹⁴. Az új bázisban a megengedhető SLOCC transzformációk csoportja nem $SU(1, 1)$ hanem $SL(2, \mathbb{R})$, összhangban azzal a korábbi megfigyelésünkkel, hogy a $|\Gamma\rangle$ állapot egy rebit qubitokba történő speciális komplex beágyazásának tekinthető.

¹⁴Az U transzformációnak megfelelő $\tau \mapsto \frac{\tau+i}{\tau-i}$ Cayley transzformáció az alsó félsíkot a Poincaré egység körbe viszi. Ismeretes, hogy a félsík $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ az egységkör pedig $SU(1, 1)/U(1)$ faktortér alakba írható.

5.3.2. $T^2 \times T^2 \times T^2$ mint három qubit rendszer [9] A fentiekben tárgyalt módszerrel a deformált tóruszok nyelvén tetszőleges számú beágyazott qubitet tárgyalhatunk. Ennek igazolására az alábbiakban mi csak az STU modellhez szükséges három qubit rendszerekre érvényes általánosítást adjuk meg. Ehhez a hat dimenziós tórusz T^6 kohomológiájának $T^2 \times T^2 \times T^2$ -vel kompatibilis csonkítását tekintjük. A következő alfejezetben megmutatjuk, hogy ez annak felel meg, hogy a 3.2.4 alfejezetben tárgyalt módon három qubit rendszereket ágyazunk be hat egyrészcseke állapottal rendelkező háromfermion rendszerekbe.

$M = T^2 \times T^2 \times T^2$ esetén három tóruszunk van három komplex deformációs paraméterrel. A komplex koordináták és deformációs paraméterek

$$z^a = u^a + \tau^a v^a, \quad \tau^a = x^a - iy^a \quad y^a > 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (5.32)$$

M holomorf háromformája

$$\Omega_0 = dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3. \quad (5.33)$$

Az egyetlen qubit esetéhez hasonlóan igaz, hogy (lásd (5.8))

$$\int_{T^6} \Omega_0 \wedge \bar{\Omega}_0 = i(8y^1 y^2 y^3) = ie^{-\mathcal{K}}, \quad (5.34)$$

ahol \mathcal{K} a Kähler potenciál és $G_{a\bar{b}} = \partial_a \bar{\partial}_{\bar{b}} \mathcal{K}$ az $[SL(2, \mathbb{R})/SO(2)]^{\times 3}$ Kähler sokaság Kähler metrikája. A továbbiakban (5.15)-hez hasonlóan bevezetjük az Ω renormált háromformát és (5.18)-nak megfelelően definiáljuk a lapos kovariáns deriváltakat

$$D_{\hat{a}} \Omega = (\bar{\tau}^a - \tau^a) D_a \Omega = (\bar{\tau}^a - \tau^a) \left(\partial_a + \frac{1}{2} \partial_a \mathcal{K} \right) \Omega, \quad (5.35)$$

ahol $\partial_a = \partial/\partial \tau^a$. Ekkor

$$\Omega = e^{\mathcal{K}/2} dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3, \quad \bar{\Omega} = e^{\mathcal{K}/2} d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2 \wedge d\bar{z}^3, \quad (5.36)$$

$$D_{\hat{1}} \Omega = e^{\mathcal{K}/2} d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3, \quad \bar{D}_{\hat{1}} \bar{\Omega} = e^{\mathcal{K}/2} dz^1 \wedge d\bar{z}^2 \wedge d\bar{z}^3, \quad (5.37)$$

$$D_{\hat{2}} \Omega = e^{\mathcal{K}/2} dz^1 \wedge d\bar{z}^2 \wedge dz^3, \quad \bar{D}_{\hat{2}} \bar{\Omega} = e^{\mathcal{K}/2} d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^3, \quad (5.38)$$

$$D_{\hat{3}} \Omega = e^{\mathcal{K}/2} dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^3, \quad \bar{D}_{\hat{3}} \bar{\Omega} = e^{\mathcal{K}/2} d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2 \wedge dz^3. \quad (5.39)$$

Vegyük észre, hogy teljesülnek az

$$\int_{T^6} \Omega \wedge \bar{\Omega} = i, \quad \int_{T^6} D_{\hat{a}} \Omega \wedge \bar{D}_{\hat{b}} \bar{\Omega} = -i \delta_{\hat{a}\hat{b}}. \quad (5.40)$$

azonosságok.

Tekintsük most a Hodge-féle csillag operáció hatását az (5.36)-(5.39) bázison. A Hodge csillag (p, q) típusú formán történő hatását az

$$(\varphi, \varphi) \frac{\omega^n}{n!} = \varphi \wedge * \bar{\varphi} \quad (5.41)$$

egyenlet definiálja ahol

$$\omega = i(d\bar{z}^1 \wedge dz^1 + d\bar{z}^2 \wedge dz^2 + d\bar{z}^3 \wedge dz^3) \quad (5.42)$$

továbbá

$$(\varphi, \varphi) \equiv \frac{1}{p!q!} \sum |\varphi_{j_1 \dots j_p k_1 \dots k_q}|^2. \quad (5.43)$$

A $\varphi \equiv dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$ stb. alakú bázisformákra $(\varphi, \varphi) = 1$. innen kapjuk, hogy

$$* \Omega = i\Omega, \quad * \bar{\Omega} = -i\bar{\Omega} \quad (5.44)$$

$$* D_{\hat{a}} \Omega = -i D_{\hat{a}} \Omega, \quad * \bar{D}_{\hat{a}} \bar{\Omega} = i \bar{D}_{\hat{a}} \bar{\Omega}. \quad (5.45)$$

A három-qubit számítási bázis definiálásához az $\Omega, D_{\hat{1}} \Omega, \dots$ bázisvektorok $-i$ -szeresét választjuk. Ezen konvenció esetén ugyanis az egy-formák sorrendjének megváltoztatása után mint

például a $-iD_1\Omega = ie^{\mathcal{K}/2}dz^3 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^1$ esetben a $|001\rangle$ jelölést használhatjuk mely a szokásos bináris címkézésnek felel meg¹⁵. Ennek a konvenciónak megfelelően

$$-i\Omega \leftrightarrow |000\rangle, \quad -iD_1\Omega \leftrightarrow |001\rangle, \quad -iD_2\Omega \leftrightarrow |010\rangle, \quad -iD_3\Omega \leftrightarrow |100\rangle \quad (5.46)$$

$$-i\bar{\Omega} \leftrightarrow |111\rangle, \quad -i\bar{D}_1\Omega \leftrightarrow |110\rangle, \quad -i\bar{D}_2\Omega \leftrightarrow |101\rangle, \quad -i\bar{D}_3\Omega \leftrightarrow |011\rangle. \quad (5.47)$$

Válasszuk az $M = T^2 \times T^2 \times T^2$ tórusznak az

$$\int_M (du^1 \wedge dv^1) \wedge (du^2 \wedge dv^2) \wedge (du^3 \wedge dv^3) = 1 \quad (5.48)$$

irányítást. Ekkor ellenőrizhető, hogy tetszőleges ξ és η háromformára a (5.22)-höz hasonlóan definiált skalárszorzatra nézve a fenti bázisvektorok ortonormáltak, továbbá a $D_j, j = 1, 2, 3$ lapos kovariáns deriváltak hatása a projektív bit flippek már ismert mintázatát követi, nevezetesen a fenti operátorok rendre az $I \otimes I \otimes \sigma_+$, $I \otimes \sigma_+ \otimes I$ and $\sigma_+ \otimes I \otimes I$ operátoroknak felelnek meg¹⁶. A konjugált lapos kovariáns deriváltak esetén σ_+ helyett σ_- irandó, a Hodge csillag operáció pedig a számítási bázisban. a $-i\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3$ operátornak felel meg.

Egy $H^3(T^2 \times T^2 \times T^2, \mathbb{Z})$ -beli csavarodási konfigurációt a

$$\Gamma = p^I \alpha_I + q_I \beta^I \in H^3(T^2 \times T^2 \times T^2, \mathbb{Z}), \quad (5.49)$$

kohomológia elemmel reprezentálhatunk ahol $I = 0, 1, 2, 3$ -re összegzést értünk és

$$\alpha_0 = du^1 \wedge du^2 \wedge du^3, \quad \beta^0 = -dv^1 \wedge dv^2 \wedge dv^3 \quad (5.50)$$

$$\alpha_1 = dv^1 \wedge du^2 \wedge du^3, \quad \beta^1 = du^1 \wedge dv^2 \wedge dv^3 \quad (5.51)$$

és a fennmaradó elemeket ciklikus permutációval kapjuk. Fennál a

$$\int_M \alpha_I \wedge \beta^J = \delta_I^J \quad (5.52)$$

összefüggés. Ekkor (5.44)-(5.45) alapján Γ -t a Hodge diagonális számítási bázisban a

$$\Gamma = i\bar{Z}(\Gamma)\Omega - iG^{a\bar{b}}\bar{D}_{\bar{b}}\bar{Z}(\Gamma)D_a\Omega + \text{c.c.} = i\bar{Z}(\Gamma)\Omega - i\delta^{\hat{a}\hat{b}}\bar{D}_{\hat{b}}\bar{Z}(\Gamma)D_{\hat{a}}\Omega + \text{c.c.} \quad (5.53)$$

alakba írhatjuk, ahol $Z(\Gamma)$ kovariáns deriváltjait az (5.18) minta szerint értelmezzük. Itt $Z(\Gamma)$ explicit alakja

$$Z(\Gamma) = e^{\mathcal{K}/2}W(\tau^3, \tau^2, \tau^1) \quad (5.54)$$

ahol

$$W(\tau^3, \tau^2, \tau^1) = q_0 + q_1\tau^1 + q_2\tau^2 + q_3\tau^3 - p^1\tau^2\tau^3 - p^2\tau^1\tau^3 - p^3\tau^1\tau^2 + p^0\tau^1\tau^2\tau^3. \quad (5.55)$$

Az (5.53) kifejtés három-qubit nyelvezetben (5.46)-(5.47) felhasználásával a

$$|\Gamma\rangle = \Gamma_{000}|000\rangle + \Gamma_{001}|001\rangle + \cdots + \Gamma_{110}|110\rangle + \Gamma_{111}|111\rangle, \quad (5.56)$$

elegáns alakba írható ahol

$$\Gamma_{111} = e^{\mathcal{K}/2}W(\tau^3, \tau^2, \tau^3) = -\bar{\Gamma}_{000}, \quad (5.57)$$

$$\Gamma_{001} = e^{\mathcal{K}/2}W(\bar{\tau}^3, \bar{\tau}^2, \tau^1) = -\bar{\Gamma}_{110} \quad (5.58)$$

és a maradék amplitúdók ciklikus permutációval kaphatók.

Számoljuk ki a $|\Gamma\rangle$ norma négyzetét! Kapjuk, hogy

$$\|\Gamma\|^2 = 2e^{\mathcal{K}}(|W(\tau^3, \tau^3, \tau^1)|^2 + |W(\bar{\tau}^3, \tau^2, \tau^1)|^2 + |W(\tau^3, \bar{\tau}^2, \tau^1)|^2 + |W(\tau^3, \tau^2, \bar{\tau}^1)|^2). \quad (5.59)$$

¹⁵A qubitokat jobbról balra számozzuk.

¹⁶Ismételten felhívjuk a figyelmet a (5.24) egyenletet megelőző bekezdésben elmondottakra.

Konstrukciónk alapján a fenti kifejezés lokális unitér és szimplektikus $(SL(2, \mathbb{R})^{\times 3} \subset Sp(8, \mathbb{R}))$ invariáns. Ennek megmutatásához az egy-qubit esetenél már tárgyalt (5.29) transzformációkkal szembeni invarianciára utalunk.

Definiáljuk a p^I és q_I , $I = 0, 1, 2, 3$ töltésekből felépített γ_{kji} $k, j, i = 0, 1$ tenzort

$$\begin{pmatrix} \gamma_{000} & \gamma_{001} & \gamma_{010} & \gamma_{100} \\ \gamma_{111} & \gamma_{110} & \gamma_{101} & \gamma_{011} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 & p^1 & p^2 & p^3 \\ -q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Ekkor a $|\Gamma\rangle$ állapotvektort az alábbi alakba írhatjuk

$$|\Gamma\rangle = \mathcal{S}_3 \otimes \mathcal{S}_2 \otimes \mathcal{S}_1 |\gamma\rangle \quad (5.61)$$

$$|\gamma\rangle = \gamma_{000}|000\rangle + \gamma_{001}|001\rangle + \dots + \gamma_{110}|110\rangle + \gamma_{111}|111\rangle \quad (5.62)$$

ahol a (5.30)-(5.31) formulák általánosításaként $\mathcal{S}_3 \otimes \mathcal{S}_2 \otimes \mathcal{S}_1$ mátrix reprezentációja

$$\frac{1}{\sqrt{8y^3y^2y^1}} \begin{pmatrix} -\bar{\tau}^3 & 1 \\ \tau^3 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\bar{\tau}^2 & 1 \\ \tau^2 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\bar{\tau}^1 & 1 \\ \tau^1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Az (5.31) felírásnak megfelelően $\mathcal{S}_a = U S_a$, $a = 1, 2, 3$ ahol U a Cayley transzformációval kapcsolatos unitér operátor S pedig a megfelelő modulus paraméterektől függő $SL(2, \mathbb{R})$ transzformáció. Az (5.62) felírásból láthatóan a $|\Gamma\rangle$ állapot a $|\gamma\rangle$ "töltésállapot" modulusoktól függő SLOCC pályáján fekszik.

Figyeljük meg, hogy (5.57)-(5.58) alapján a $|\Gamma\rangle$ állapotvektor komplex amplitúdói az (5.54)-beli $Z(\Gamma)$ mennyiségből a modulusok konjugálásával kaphatók. Ezt a mennyiséget pedig

$$Z(\Gamma) = \int_M \Omega \wedge \Gamma = \int_C \Omega, \quad \mathcal{C} = q_I A^I + p^I B_I \quad (5.64)$$

alakba is írhatjuk ahol $\Omega = e^{\mathcal{K}/2} \Omega_0$ és a \mathcal{C} csavarodási (homológia) konfiguráció a Γ kohomológia elem Poincaré duáltja A^I és B_I bázis három-ciklusokkal¹⁷. További fontos megfigyelés, hogy az (5.55) $W(\Gamma) = \int_M \Omega_0 \wedge \Gamma = \int_C \Omega_0$ mennyiség szerkezete a Freudenthal-rendszereket definiáló $W_{\eta,y,x,\xi}(z)$ polinom (4.53) alakjára emlékeztet. Valóban, ha az ott szereplő 3×3 -as z -mátrixnak a kizárólag τ^1, τ^2, τ^3 diagonális elemekkel rendelkező mátrixot illetve az $(\eta, y, x, \xi) = (p^0, -P, Q, q_0)$ szereposztást választjuk ahol P és Q diagonális 3×3 -as mátrixok p^1, p^2, p^3 illetve q_1, q_2, q_3 elemekkel akkor a megfelelés nyilvánvaló. Sőt, (3.103) és (5.48) alapján azt is megjegyezhetjük, hogy $W(\Gamma) = \int_M \{\Omega_0, \Gamma\} \mathbb{E}$ ahol $\{\cdot, \cdot\}$ a háromformákon bevezethető természetes alternáló (szimplektikus) forma.

Alfejezetünket egy fontos megjegyzéssel zárjuk. Amennyiben az (5.60) három-qubit amplitúdók kifejezésében a $p \equiv p^1 = p^2 = p^3$ és $q \equiv q_1 = q_2 = q_3$ illetve az (5.63) moduli függő SLOCC transzformációk képletében a $\tau \equiv \tau^1 = \tau^2 = \tau^3$ megszorításokat alkalmazzuk, akkor (5.61) állapotvektorunk a 4.2 fejezetben tárgyalt három bozonikus qubit esetét írja le. A tórusz képen erre az esetre mint a "diagonális tórusz"-ra fogunk hivatkozni, tekintettel arra, hogy ekkor igazából egyetlen, τ moduláris paraméterrel jellemzett elliptikus görbénk van. Ekkor a megfelelően módosított $W(\Gamma) = \int_M \Omega_0 \wedge \Gamma = \int_C \Omega_0$ mennyiség a 4.1 táblázat első sorában szereplő Freudenthal rendszert definiálja.

5.3.3. Fermionikus rendszerek és a hat dimenziós tórusz [9]. Az előző alfejezetben tárgyalt $M = T^2 \times T^2 \times T^2$ rendszer a hat dimenziós tórusz T^6 speciális esetének tekinthető. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy M -nek T^6 -ba történő beágyazása a három-qubit rendszerek 3.2.4-ben tárgyalt fermionikus rendszerbe történő beágyazásának felel meg.

A hat dimenziós tóruszt \mathbb{C}^3 alkalmas L diszkrét csoporttal (ráccsal) történő lefaktorizálása útján kapjuk: $T^6 \simeq \mathbb{C}^3/L$. Valóban, a közönséges T^2 tórusz is felírható $T^2 \simeq \mathbb{C}/L$ alakban ahol az L rácsot generáló rácsvektoroknak az $1, \tau$ komplex vektorokat feleltetjük meg. T^6 esetén L

¹⁷ $\int_{A^I} \alpha_J = \delta_{IJ}$, $\int_{B_I} \beta^J = -\delta^{IJ}$

generálásához hat darab egyenként három komponensű vektort kell megadnunk. Megmutatható, hogy a megfelelő bázisvektorokat az (I, τ) 3×6 -os mátrix oszlopvektorainak választhatjuk, ahol I a 3×3 -as egységmátrix és a τ 3×3 -as mátrix (az úgynevezett periódus mátrix) kielégíti a

$$\tau^t = \tau, \quad \tau = x - iy, \quad y > 0 \quad (5.65)$$

feltételeket. Az első feltétel szerint a periódus mátrix szimmetrikus, a második szerint a mátrix képzetes része az (5.32) konvenciónak megfelelően negatív definit¹⁸. Amennyiben a tórusz lokális koordinátái $u^a, v^a, a = 1, 2, 3$ akkor a megfelelő komplex koordináták

$$z^a = u^a + \tau^{ab} v^b \quad (5.66)$$

ahol az ismétlődő indexekre összegzést értünk. A holomorf háromformát ismét a $\Omega_0 = dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$ kifejezéssel adott ahol most (5.66)-ot kell használnunk és T^6 irányítását illetően ismét az (5.48) formula van érvényben. A három-qubit esettel ellentétben azonban most a teljes $H^3(T^6, \mathbb{C})$ teret ki kell használnunk. Ez azt jelenti, hogy $\Gamma \in H^3(T^6, \mathbb{C})$ kifejtésekor 20 bázisvektort kell használnunk. Válasszuk a három-qubit eset (5.50)-(5.51) 8 bázisvektorát is magába foglaló alábbi bázist

$$\alpha_0 = du^1 \wedge du^2 \wedge du^3, \quad \alpha_{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{aa'b'} du^{a'} \wedge du^{b'} \wedge dv^b \quad (5.67)$$

$$\beta^0 = -dv^1 \wedge dv^2 \wedge dv^3, \quad \beta^{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ba'b'} du^a \wedge dv^{a'} \wedge dv^{b'}. \quad (5.68)$$

Erre a bázisra fennáll a (5.52) összefüggés és belátható, hogy

$$\Omega_0 = \alpha_0 + \tau^{ab} \alpha_{ab} + \tau_{ab}^{\#} \beta^{ba} - (\text{Det } \tau) \beta^0, \quad (5.69)$$

$\tau^{\#}$ definícióját illetően pedig lásd a (4.38) és (4.39) képleteket. Egy tetszőleges Γ kohomológia elem ekkor a

$$\Gamma = p^0 \alpha_0 + P^{ab} \alpha_{ab} + Q_{ab} \beta^{ab} + q_0 \beta^0 \quad (5.70)$$

alakban áll elő, ezt a

$$\Gamma = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} \gamma_{ijk} f^i \wedge f^j \wedge f^k \quad (5.71)$$

alakba is írhatjuk ahol

$$(f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \equiv (f^1, f^2, f^3, f^{\bar{1}}, f^{\bar{2}}, f^{\bar{3}}) = (du^1, du^2, du^3, dv^1, dv^2, dv^3) \quad (5.72)$$

és

$$p^0 = \gamma_{123}, \quad \begin{pmatrix} P^{11} & P^{12} & P^{13} \\ P^{21} & P^{22} & P^{23} \\ P^{31} & P^{32} & P^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{23\bar{1}} & \gamma_{23\bar{2}} & \gamma_{23\bar{3}} \\ \gamma_{31\bar{1}} & \gamma_{31\bar{2}} & \gamma_{31\bar{3}} \\ \gamma_{12\bar{1}} & \gamma_{12\bar{2}} & \gamma_{12\bar{3}} \end{pmatrix} \quad (5.73)$$

$$q_0 = -\gamma_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}}, \quad \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} & \gamma_{\bar{1}\bar{3}\bar{1}} & \gamma_{\bar{1}\bar{1}\bar{2}} \\ \gamma_{\bar{2}\bar{2}\bar{3}} & \gamma_{\bar{2}\bar{3}\bar{1}} & \gamma_{\bar{2}\bar{1}\bar{2}} \\ \gamma_{\bar{3}\bar{2}\bar{3}} & \gamma_{\bar{3}\bar{3}\bar{1}} & \gamma_{\bar{3}\bar{1}\bar{2}} \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

Vegyük most figyelembe az (5.65) feltételeket! Az első feltétel alapján a τ periódusmátrix szimmetrikus ezért Ω_0 (5.69) kifejtésében csak az α_{ab} és β^{ab} kombinációk szimmetrikus része szerepelhet hat-hat független komponenssel. Ezért a principálisan polarizált T^6 kohomológiája nem $20 = 1 + 9 + 9 + 1$ hanem $14 = 1 + 6 + 6 + 1$ dimenziós. Ez a megszorítás nyilván a Q és P mátrixokra is vonatkozik tehát

$$Q^t = Q, \quad P^t = P. \quad (5.75)$$

¹⁸ A τ -ra vonatkozó fenti feltételek teljesülése esetén T^6 egy principálisan polarizált tórusz. Ez a kifejezés azt jelenti, hogy a \mathbb{C}^3/L faktorizálással előálló tórusz alapjául szolgáló \mathbb{C}^3 el van látva egy olyan pozitív definit Hermitikus formával melynek képzetes része egy olyan egész értékű alternáló forma melynek mátrixának determinánsa egy. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy az (I, τ) választás esetén a fenti alternáló forma a standard (3.54) szimplektikus forma ahol most $N = 3$.

Ezzel a megszorítással a 3.2.4 fejezetben már találkoztunk. Valóban, ebből a fejezetből tudjuk, hogy amennyiben az egyrészecske állapotok terén egy extra szimplektikus struktúra is adott (a jelen esetben ezt az $\omega = f^1 \wedge \bar{f}^1 + f^2 \wedge \bar{f}^2 + f^3 \wedge \bar{f}^3$ szimplektikus forma definiálja) akkor a SLOCC csoport hatás helyett célszerű a megfelelő szimplektikus csoport hatást tekinteni. Erre a csoport hatásra nézve a fermionikus állapottér nem irreducibilis (jelen esetben a hat módusú háromfermion állapotok tere). A reducibilis fermionikus állapottér egy fontos irreducibilis altere a primitív formák altere volt melyre $\omega \wedge \Gamma = 0$. Amint azt a (3.56)-(3.61) képletekből láttuk ez a feltétel ekvivalens a most használt (5.75) feltétellel.

A Kähler potenciált (5.34)-nek megfelelően definiáljuk. Az (5.69) formulát és a (4.49) összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$e^{-\mathcal{K}} = 8 \text{Det } y. \quad (5.76)$$

Mivel az y mátrix pozitív definit ezért a Kähler potenciál fenti definíciója összhangban van az (5.65) feltétel második részével, miszerint a periódus mátrix képzetes része negatív definit.

A következőkben új moduli-függő bázisvektorokat vezetünk be

$$e^i = f^{i'} S_{i'}^i, \quad S_{i'}^i = \begin{pmatrix} I & I \\ \tau & \bar{\tau} \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

ahol f^i az (5.72) sorvektor¹⁹. Ekkor írható, hogy

$$\Gamma = \frac{1}{6} \Gamma_{i'j'k'} \left(-ie^{\mathcal{K}/2} e^{i'} \wedge e^{j'} \wedge e^{k'} \right) \quad (5.78)$$

ahol

$$\Gamma_{i'j'k'} = S_{i'}^i S_{j'}^j S_{k'}^k \gamma_{ijk} \quad (5.79)$$

és

$$\mathcal{S} \equiv -ie^{-\mathcal{K}/6} S^{-1} = -ie^{-\mathcal{K}/6} (\tau - \bar{\tau})^{-1} \begin{pmatrix} -\bar{\tau} & I \\ \tau & -I \end{pmatrix}. \quad (5.80)$$

A három-qubit eset (5.36)-(5.39) bázisvektoraihoz hasonlóan az $e^{\mathcal{K}/2} e^{i'} \wedge e^{j'} \wedge e^{k'}$ bázisvektorok is diagonalizálják a Hodge-féle csillag operációt. Tehát az (5.71) és (5.78) kifejtések közül a második, a Γ fermionikus állapot moduli-függő Hodge diagonális kifejtését adja. Könnyen látható az is, hogy a Γ (5.79) amplitúdói a τ diagonális esetben a beágyazott három-qubit eset amplitúdóit szolgáltatják. Valóban, a (3.47) képlet megmutatja hogyan kell a három-qubit SLOCC csoportot a fermionikus SLOCC csoportba beágyaznunk. Ha most az \mathcal{S} mátrix (5.80) kifejezésében a τ periódus mátrixnak csak a diagonális elemeit tartjuk meg akkor az $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$ szorzat a megfelelő három-qubites (5.63) tenzorszorzatot adja.

Az (5.64) kifejezésnek megfelelően definiáljuk a

$$Z(\Gamma) = e^{\mathcal{K}/2} W(\Gamma) = e^{\mathcal{K}/2} \int_{T^6} \Omega_0 \wedge \Gamma = e^{\mathcal{K}/2} \int_C \Omega_0 \quad (5.81)$$

menyiséget ahol C a Γ kohomológia elemhez Poincaré duált homológia ciklus. Az ebben szereplő $W(\Gamma)$ explicit alakja (5.69), (5.70) és (5.52) következtében

$$W(\Gamma) = q_0 + (Q, \tau) - (P, \tau^\sharp) + p^0 \text{Det } \tau \quad (5.82)$$

ahol $(A, B) \equiv \text{Tr}(AB)$. Ebben a kifejezésben az (5.75) és (5.65) kényszerek miatt 14 valós "csavarodási szám" és 6 komplex moduli szerepel. Ebből fakadóan (4.53) alapján $W(\Gamma)$ a valós köbös $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ Jordan algebrán alapuló Freudenthal rendszer definiáló $W_{\eta, y, x, \xi}(\tau)$ polinomja ahol $(\eta, y, x, \xi) = (p^0, -P, Q, q_0)$.

¹⁹Nyilván az új bázis az egy-formák terében az $e^a \equiv dz^a = du^a + \tau^{ab} dv^b$, $e^{\bar{a}} \equiv d\bar{z}^a = du^a + \bar{\tau}^{ab} dv^b$ bázisnak felel meg ahol $a, b = 1, 2, 3$.

Megjegyezzük, hogy a három-qubit esethez hasonlóan most is érvényes egy (5.53) jellegű formula mely azt mutatja, hogy a Γ állapot összes Γ_{ABC} amplitúdója megkapható az egyetlen $\Gamma_{123} = -\Gamma_{12\bar{3}} = Z(\Gamma)$ amplitúdóból alkalmasan definiált kovariáns deriváltak alkalmazásával²⁰.

Végezetül felhívjuk a figyelmet arra, hogy az eddigiekben tekintett diagonális tórusz $((T^2 \times T^2 \times T^2)_{\text{diag}}$, három kétdimenziós tórusz $(T^2 \times T^2 \times T^2)$ és principálisan polarizált hat dimenziós tórusz (T^6) komplex deformációinak matematikája a 4.2 táblázatban összefoglalt speciális ("Freudenthal-típusú") összefonódott rendszerek egységes nyelvén tárgyalható. Mindhárom eset kulcsfontosságú mennyisége a csavarodási számokkal parametrizált $W(\Gamma) = \int_M \Omega_0 \wedge \Gamma$ (moduli paraméterekben tekintett) polinom. A 4.2 táblázatban azonban három másik Freudenthal típusú rendszer is szerepel. Tudjuk, hogy ezek közül az első két eset speciális összefonódott rendszerekkel kapcsolatos. Felmerül tehát a kérdés, mi ezeknek a rendszereknek a deformált tóruszok geometriájával való kapcsolata? Az első esetben a válasz nyilvánvaló. Ez az eset egy olyan T^6 komplex deformációt írja le mely nem principálisan polarizált. A második eset vizsgálatát későbbre halasztjuk. Elöljáróban elégedjünk meg annyival, hogy a tórusz komplex struktúráján kívül a Kähler struktúráját is deformálhatjuk. Ezeket a deformációkat egységesen az úgynevezett "általánosított komplex struktúrák" nyelvén tárgyalhatjuk. Látni fogjuk, hogy az ominózus második eset T^6 általánosított komplex struktúra deformációit írja le a 3.5 fejezetben tárgyalt fermionikus összefonódott rendszerek nyelvén.

Az eddigiekben a toroidális deformációk és az összefonódott rendszerek kapcsolatát tisztán matematikai szempontból tekintettük. A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogyan bukkanak fel ezek a struktúrák a húrelméleti fekete lyuk megoldások fizikájában.

5.4. Fekete lyuk megoldások a húrelméletben

5.4.1. A húrelméletről röviden . Az alábbi fejezetek célja az, hogy az Olvasó egy vázlatos képpel rendelkezzen arról a húrelmélet nyújtotta fizikai kontextusról melyben az összefonódással kapcsolatos struktúrák megjelennek. Az alábbi fejezetek vázlatos képének kibővítéséhez lásd például [JHS07].

A húrelmélet alapgondolata szerint a Természetben megfigyelhető kölcsönhatásokkal kapcsolatos valamennyi részecske valójában parányi (feltehetően Planck-hossz nagyságrendű) húrok és membránok rezgési mintázataiként értelmezhető. A pontszerű és a kiterjedt objektumok kvantumelmélete között számos fontos különbség van. Ismeretes, hogy amennyiben csak a matematikai konzisztencia kritériuma lebeg a szemünk előtt akkor sok olyan kvantumtérelmélet konstruálható mely a fizikában használatos alapelveket (unitaritás, Lorentz invariancia, negatív normájú állapotok hiánya, anomália mentesség stb.) tiszteletben tartja. A 1980-as évek közepén azonban kiderült, hogy ezen alapelveknek eleget tevő matematikai szempontból konzisztens húrelméletről csak öt létezik. Ezek az I, a IIA és IIB típusú húrelméletek, illetve a két úgynevezett "heterotikus" húrelmélet²¹.

A fenti húrelméletek számos meglepő tulajdonsággal rendelkeznek. Az alábbiakban három ilyen tulajdonságot emelünk ki.

Talán a legfontosabb tulajdonság az, hogy míg a pontrészecske szemléleten alapuló hagyományos kvantumtérelméleti képbe konzisztens módon nem illeszthető be a gravitációs kölcsönhatás,

²⁰Ezeknek a deriváltaknak az explicit alakjának felírásától most eltekintünk. Az explicit alakokat illetően lásd Sárosi Gábor Msc dolgozatát [Sár12].

²¹Szokásos ehhez az öt elmélethez még hozzávenni egy speciális kvantumtérelméletet, az úgynevezett 11 dimenziós szupergravitációs elméletet, melynek létezése ugyancsak speciális matematikai egybeeséseken múlik. Az elmélet ugyan nem húrelmélet, de igen speciális kapcsolatban van a IIA típusú húrelmélettel.

addig a húrelméletek konzisztens kvantumgravitációs elméletek. Tekintettel arra, hogy a húrelméletről a gravitációs kölcsönhatást leíró Einstein egyenletek leszármaztathatók, egyesek szerint a húrelméletnek legalább egy döntő fontosságú jóslata van: maga a gravitáció jelensége²².

A második fontos tulajdonság az, hogy a kvantumtérelméletekkel szemben a húrelméletek csak tíz téridő dimenzióban konzisztensek. A kiterjedt objektumok kvantumdinamikája elválaszthatatlan a téridő "háttér" geometriai tulajdonságaitól. A húrdinamika és a háttérgeometria számos későbbiekben megfigyelt matematikai szempontból precízen dokumentált összefonódása meglepő. Ez azt jelzi, hogy az "adott háttérben mozgó kiterjedt objektumok" kép csak egy lehetséges kiépítését nyújthatja a húrelméleteknek. A húrelméletek háttérfüggetlen megfogalmazásának problémája alapvető fontosságú.

A harmadik kiemelt tulajdonság az, hogy a fenti húrelméletek mindegyike szuperszimmetrikus. Ez azt jelenti, hogy az elmélet fermionikus és bozonikus szabadsági fokai egy szimmetriaelv keretén belül összekapcsolódnak. Matematikai szempontból ez azt jelenti, hogy a húrelméletekben szereplő bozonikus mennyiségeket fermionikusba és viszont alakító bizonyos transzformációkra nézve az elmélet változatlan marad. A hagyományos kvantumtérelméleti képben a kölcsönhatásokat (gravitációs, elektromágneses, gyenge, erős) közvetítő részecskéket (graviton, foton, mértékbozonok, gluonok) reprezentáló terek bozonikusak, míg az úgynevezett "anyagterek" (elektronok, müonok, neutrínók, kvarkok) fermionikusak. A szuperszimmetria szakít a fenti mesterséges "erőterek" + "anyagterek" felosztással és a kvantumos szabadsági fokokat egy egységes képben tárgyalja. Ez a szuperszimmetria diktálta demokratikus szemlélet a húrelméletek elválaszthatatlan része.

A húrelméletek tehát extra dimenziókat és szimmetriákat jósolnak. Tekintettel arra, hogy a kísérleti tapasztalataink szerint a mi alacsony energiás világunk négy dimenziós és szuperszimmetriának ezidáig semmi jele, a húrelméletnek számot kell adnia arról mi történik az extra dimenziókkal illetve arról, hogy mi a szuperszimmetria sérülésének pontos mechanizmusa.

Az extra dimenziók problémájának egy lehetséges kezelése abban áll, hogy feltesszük azt, hogy az extra térszerű dimenziók mérete a szokásos téridő dimenziókhöz viszonyítva kicsi²³. Azt a dinamikai mechanizmust melynek során a tíz téridő dimenzióból hat térszerű dimenzió egy kompakt sokaságba gyűrődik, kompaktifikációnak nevezzük.

Nyilván a kompaktifikáció eredményeként előálló effektív négydimenziós elmélet megkonstruálása alapvető fontosságú. A fő kérdés az, hogy a felgyűrődő hat dimenziós sokaság geometriai, topológiai tulajdonságai hogyan jelennek meg a négydimenziós képben. Például az extra dimenziókra feltekeredett membránok a négydimenziós képben különféle fizikai effektusok megjelenésére vezetnek. Ilyenek effektus például az Aharonov-Bohm típusú fluxusokkal, elektromos illetve mágneses töltésekkel, meghatározott tömeggel rendelkező speciális objektumok megjelenése. Ilyen speciális objektumok az elkövetkezőkben terítékre kerülő fekete lyukak is.

A húrelmélet fejlődésében fontos fordulat következett be az 1990-es évek közepén mikor kiderült, hogy a fentiekben ismertetett öt húrelmélet és a 11 dimenziós supergravitáció alkotja hat elmélet nem független. Megmutatták, hogy ezeket az elméleteket úgynevezett dualitási transzformációk kötik össze.

A dualitás jelenséget röviden az alábbi módon foglalhatjuk össze. A húrelméleteket két paraméter jellemzi. A $T = 1/2\pi\alpha'$ húrfeszültség²⁴ és a g_s húr csatolás. Az utóbbi dimenziótlan mennyiség mely azt méri, hogy egy húr milyen hajlandóságot mutat arra nézve, hogy két húrrá osztódjon. A dualitások értelmében előfordulhat az, hogy egy húrelmélet a gyengén csatolt

²²E. Witten szerint a gravitációt némi iróniával a húrelmélet "post-predikciójának" kell tekintenünk.

²³Fontos kérdés persze az, hogy ezek mérete hogyan viszonyul a húrok méretéhez.

²⁴Az α' paraméter az úgynevezett Regge slope paraméter. A $\hbar = c = 1$ egységrendszerben a paraméter hosszúság négyzet dimenziójú. Tehát $\sqrt{\alpha'}$ a húr méretét rögzíti.

(perturbatív) tartományban ugyanolyan értéket ad egy fizikai mennyiségre mint egy másik húrelmélet az erősen csatolt (nemperturbatív) tartományban. Ezt a dualitást S -dualitásnak nevezik. Előfordulhat az is, hogy ha az egyik húrelméletet egy M , egy másik húrelméletet pedig egy W hatdimenziós sokaságra kompaktifikáljuk akkor a megfelelő fizikai mennyiségekre ugyanazt az eredményt kapjuk. Ezt a dualitást "tükrörszimmetriának" nevezzük. A fenti dualitás igen meglepő hiszen az (M, W) páros tagjai topológia szempontból különbözőek is lehetnek. További fontos dualitás a T -dualitás. Ez tóruszokra történő kompaktifikálásnál lép fel. Ha egy rögzített húrelméletnél a tóruszokat jellemző R_i sugarakat az $R_i \mapsto \alpha'/R_i$ módon megváltoztatjuk akkor a releváns fizikai mennyiségek nem változnak. Ez a dualitás azt mutatja, hogy a fizika kis méretű és nagy méretű tóruszoknál ugyanaz. 1995-óta számos egyéb dualitást is megfigyeltek. A dualitások hálózatát alkotó transzformációk csoportot alkotnak. Ezek együttesét U -dualitási csoportnak nevezzük.

A húrelméletek közötti dualitások arra utalnak, hogy ezek az elméletek nem függetlenek hanem egy alapvetőbb elmélet különböző speciális esetei. Ezt az elméletet M -elméletnek nevezik. Az M -elmélet egy 11 dimenziós kvantumelmélet melynek pontos matematikai alakja nem ismert. Mindaz amit jelenleg erről az elméletéről tudunk az a dualitások hálózatával kapcsolatos konzisztencia ellenőrzéseken alapul. Egy biztos pont: az elmélet alacsony energiás effektív határértéke a 11 dimenziós szupergravitáció elmélete. Az M -elmélettel kapcsolatos dualitások legegyszerűbb példája: ha a 11 dimenziós szupergravitációs elméleten dimenzióredukciót végzünk (egy olyan körre vonatkozóan melynek sugara R) akkor a 10 dimenziós IIA húrelmélet alacsonyenergiás effektív szuperszimmetrikus térelméletét kapjuk ahol $g_s = R/\sqrt{\alpha'}$. Ez azt jelzi, hogy a IIA típusú húrelmélet az M -elmélet egyik speciális határeseté. Az M -elméletet reprezentáló különböző húrelméleteket dualitási rendszereknek is szokás nevezni. Így például beszélhetünk IIA, IIB stb. dualitási rendszerekről. Ebben a képben az M -elmélet különböző dualitási rendszereit különböző koordinátarendszerekhez hasonlíthatjuk ahol a húrelméletek közötti közlekedést biztosító dualitási transzformációk a koordináta transzformációknak felelnek meg. A kvantumos összefonódással kapcsolatos struktúrák felbukkanását legegyszerűbb a II típusú dualitási rendszerekben kimutatni. Ezért a következőkben a IIA és IIB típusú húrelméletekkel kapcsolatos ismereteket tekintjük át.

5.4.2. IIA és IIB típusú húrelméletek . A $D = 10$ téridő dimenzióban konzisztens, irányított zárt húrokat leíró II típusú húrelméletek $\mathcal{N} = 2$ szuperszimmetriával rendelkeznek. Ennek megfelelően az elméletet három a σ és τ változókkal paraméterezett

$$X^\mu(\sigma, \tau), \quad \theta^{Aa}(\sigma, \tau), \quad \mu = 0, 1, \dots, 9, \quad a = 1, 2, \dots, 32, \quad A = 1, 2 \quad (5.83)$$

tér segítségével definiálják²⁵. Az $X^\mu(\sigma, \tau)$ bozonikus tér a húr által a 10 dimenziós téridőben végigseper, a σ és τ változókkal paraméterezett "világlepedőt" reprezentálja. Az $\mathcal{N} = 2$ szuperszimmetria miatt a fermionikus szabadsági fokokat két $2^{D/2} = 32$ komponensű Grassmann értékeket felvevő Majorana-Weyl spinor írja le. A Majorana-Weyl feltétel miatt a 32 komponensű θ^1 és θ^2 spinorok mindegyike csak 16 valós komponenssel rendelkezik. A spinor terek Grassmann értékűsége azt jelenti, hogy ezek antikommutáló Grassmann számokon veszik fel értéküket.

Az elméletet egy globális szuper-Poincaré és egy lokális diffeomorfizmus szimmetriával rendelkező $S = S_1 + S_2$ hatás felírásával definiálják [JHS07]. Az S_1 tag a bozonikus húrelméletből ismert Nambu-Goto hatás szuperszimmetrikus általánosítása, mely a világlepedő téridőben besepert területével kapcsolatos²⁶. A szuperszimmetria helyes implementálásához biztosítanunk kell, hogy a fermionikus és bozonikus szabadsági fokok száma ugyanaz legyen. Ezt egy új (κ

²⁵Az A és a felső indexek tartománya kizárólag ebben az alfejezetben fut az (5.83) értékeken. A hátralévő fejezetekben továbbra is az (5.32) és (5.71) által adott konvenció van érvényben.

²⁶A bozonikus húr esetében legyen f az a beágyazó leképezés melynek lokális koordinátás alakja $X^\mu(\sigma, \tau)$. Ekkor az S_1 -vel kapcsolatos Lagrange sűrűség a világlepedő első fundamentális formájának determinánsának

szimmetriának nevezett) lokális fermionikus szimmetria bevezetésével érik el melynek segítségével a θ terek komponenseinek felét eliminálják. A κ szimmetria biztosításához szükség van az S_2 Wess-Zumino (Chern-Simons) típusú tag bevezetésére. Ez a tag egy két-forma integráljaként áll elő [JHS07].

A következő lépés az S hatással definiált elmélet kvantálása. Az elmélet fénykúp-mértékben történő kvantálása elvégezhető. A mérték szabadsági fokok fénykúp mérték általi eliminálásával elérhető, hogy csak 8 valós $X^i, i = 1, 2, \dots, 8$ bozonikus szabadsági fokunk maradjon melyek a 10 dimenzióban elérhető transzverzális szabadsági fokoknak felelnek meg, s melyek lineáris hullám egyenleteket elégítenek ki. A húr által definiált világlepedőn terjedő módusok nyelvéen ez 8 balra és 8 jobbra propagáló szabadsági fokot jelent. Tudjuk, hogy a 32 komponensű θ^1 és θ^2 spinorok mindegyike csak 16 valós komponenssel rendelkezik. Megmutatható, hogy egy alkalmas κ transzformáció alkalmazásával lehetséges egy olyan mértéket választani, mely mindkét spinor valós komponenseinek számát ugyancsak 8-ra csökkenti. A mérték szabadsági fokok fenti rögzítésének kellemes következménye az, hogy az S hatás variálásával származtatható spinorokra vonatkozó mozgásegyenletek is lineárisak lesznek. Az egyenletek megoldása után kiderül, hogy a megoldásul kapott θ^1 és θ^2 spinorok a húr mentén ellentétes irányokba terjedő hullámokat írnak le.

Lapos Minkowski téridőben propagáló hurok esetén a fénykúp mérték választásának következtében az elméletnek a tíz dimenziós Lorentz szimmetria helyett a transzverzális irányokkal kapcsolatos $SO(8)$ forgási szimmetriája marad. Az $SO(8)$ csoport egy igen speciális tulajdonsággal, a triálitással rendelkezik. Ez azt jelenti, hogy a csoport három nyolc dimenziós ábrázolással is rendelkezik melyek egymással igen speciális kapcsolatban állnak. Ezek: két inekvivalens spinor ábrázolás $\mathbf{8}_s$ és a konjugáltja $\mathbf{8}_c$, illetve a szokásos $\mathbf{8}_v$ vektor ábrázolás. A fénykúp mérték alkalmazása után az X^i szabadsági fokok a $\mathbf{8}_v$ ábrázolás szerint transzformálódnak. A spinor ábrázolások ellentétes kiralitású szabadsági fokokat írnak le. Az ábrázolások megválasztásával specifikálhatjuk, hogy a fénykúp mérték alkalmazása után a maradék szabadsági fokok jobb vagy bal "kezesek". A θ^1 és θ^2 helyett jelöljük az alkalmasan normált szabadsági fokokat [JHS07] az alábbi módon:

$$(S_1^a, S_2^a) \in \mathbf{8}_s \oplus \mathbf{8}_c \quad (5.84)$$

$$(S_1^a, S_2^a) \in \mathbf{8}_s \oplus \mathbf{8}_s \quad (5.85)$$

ahol most $a = 1, 2, \dots, 8$ a fennmaradó független szabadsági fokokra utal²⁷. Az (5.84) választás a IIA típusú húrelméletet az (5.85) választás a IIB típusú húrelméletet definiálja. Ezekkel a jelölésekkel a IIB elmélet mozgásegyenletei fénykúp mértékben

$$\partial_+ \partial_- X^i = 0, \quad \partial_+ S_1^a = 0, \quad \partial_- S_2^a = 0 \quad (5.86)$$

ahol $\partial_{\pm} = (\partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma})/2$. A IIA esetben S_2^a helyett $S_2^{\dot{a}}$ irrandó.

A kanonikus kvantálás eredményeképp a mozgásegyenleteket és a határfeltételeket kielégítő X^i és S^{Aa} terek normálmódusok szerinti kifejtésében az α_n^i és S_{An}^a kifejtési együtthatók olyan operátorok lesznek melyek speciális kvantálási feltételeket elégítenek ki. A legfontosabb ilyen feltétel az úgynevezett tömeghély feltétel mely a húr gerjesztéseinek M tömegét tartalmazó $\alpha' M^2$ mennyiséget fejezi ki a $\hat{\alpha}_n^i$ és \hat{S}_{An}^a operátorokkal. Kiderül, hogy a zérus tömegű alapállapotért felelős zérómódusok egy degenerált állapotot adnak. A IIA és IIB elméletekben propagáló zárt hurok degenerált alapállapota 256 állapotot tartalmaz mely a megfelelő elméletekben a balra és jobbra mozgó állapotok alábbi tenzorszorzataként áll elő. A IIA esetben a megfelelő tenzorszorzat

$$(\mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_c) \otimes (\mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_s) \quad (5.87)$$

négyzetgyöke. Az első fundamentális forma a beágyazó téridő G metrikájának az f által a világlepedőre történő f^*G visszahúzottja.

²⁷A IIB esetben választhatnánk a $\mathbf{8}_c \oplus \mathbf{8}_c$ lehetőséget is.

a IIB esetben pedig

$$(\mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_c) \otimes (\mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_c). \quad (5.88)$$

A 256 állapotból 128 bozonikus és 128 fermionikus állapot. Az állapotok szerkezete a megfelelő tenzorszorzatok kiredukálásából olvasható le. Számunkra a későbbiekben csak a bozonikus állapotok lesznek fontosak. A IIA bozonikus állapotainak esetében

$$\mathbf{8}_v \otimes \mathbf{8}_v = \mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{35}, \quad \mathbf{8}_c \otimes \mathbf{8}_s = \mathbf{8}_v \oplus \mathbf{56} \quad (5.89)$$

a IIB bozonikus állapotaira pedig

$$\mathbf{8}_v \otimes \mathbf{8}_v = \mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{35}, \quad \mathbf{8}_c \otimes \mathbf{8}_c = \mathbf{1} \oplus \mathbf{28} \oplus \mathbf{35}_+. \quad (5.90)$$

Láthatóan mindkettő II típusú elméletben megjelenik egy skalár (**1**) egy antiszimmetrikus tenzor (**28**) és egy olyan szimmetrikus tenzor melynek átlósösszege zérus (**35**). Megmutatható, hogy ezek az állapotok rendre az alábbi terek kvantumainak felelnek meg: dilaton (Φ), antiszimmetrikus tenzor (Kalb-Ramond) tér ($B_{\mu\nu}$) és graviton ($G_{\mu\nu}$). Az e^Φ mennyiség várható értéke a II típusú húrelméletek g_s húr csatolási állandójával egyezik meg. A Kalb-Ramond tér egy B két-formát definiál melyre a $H \equiv dB$ háromforma a Maxwell-féle elektromos és mágneses tereket definiáló $F = dA$ térerősség-forma általánosítása.

A IIA és IIB elméletek bozonikus szektorának az a része mely a fermionikus szabadsági fokoktól származik további antiszimmetrikus tenzortereket tartalmaz. A IIA elméletben ezek egy egy-formának (**8**) és egy három-formának (**56**), illetve a IIB elméletben egy nulla formának (**1**), egy két-formának (**28**) és egy önduális négy-formának (**35**₊) felelnek meg²⁸. Jelöljük ezeknek az antiszimmetrikus tereknek megfelelő p -formákat C_p -vel külső deriváltjaikat pedig $F_p = dC_p$ -vel. Az utóbbi formulák a Maxwell-terek általánosítását adó térerősségtenzorokat definiálnak. Későbbi fejtegetéseink szempontjából különösen fontos lesz majd az $*F_5 = F_5$ önduális öt forma. Már most felhívjuk a figyelmet arra a fontos körülményre, hogy jóllehet F_5 egy bozonikus tér azonban eredete (az öndualitás kényszerével együtt) a IIB húrelmélet fermionikus szektora. Valóban, a p -formákkal kapcsolatos II típusú terek mindegyike $\bar{\varphi}\Gamma_{i_1\dots i_p}\psi$ típusú fermionikus bilineáris kombinációkból származik ahol a φ és ψ spinorok vagy egyező ($p = 0, 2, 4$) vagy ellentett ($p = 1, 3$) kiralitásúak.

5.4.3. IIB típusú szupergravitáció . Az összefonódással kapcsolatos struktúrák legegyszerűbben a IIB dualitási rendszerben mutathatók ki. Ezért a továbbiakban csak erre a rendszerre koncentrálnunk. Megjegyezzük azonban, hogy mivel a Calabi-Yau sokaságokra kompaktifikált IIB és IIA húrelméleteket a tükörszimmetriának nevezett dualitási szimmetria köti össze azt várjuk, hogy az egyik dualitási rendszerben talált összefonódottsággal kapcsolatos struktúrák a másik dualitási rendszerben az eredetitől lényegesen különböző összefonódott struktúrákba képezhetők. Látni fogjuk, hogy ez valóban így van.

Láttuk, hogy a IIB típusú hurok kiterjedt objektumok, melyek "húrosságát" az α' paraméter méri. Az $\alpha' \rightarrow 0$ limesz a kvantumelméletből ismert $\hbar \rightarrow 0$ limeszhez azaz a klasszikus limeszhez hasonlít. Ebben a "pontrészcseke" limeszben a húrelméletet mint egy olyan effektív alacsony-energiás superszimmetrikus kvantumtérelméletet kezelhetjük melynek bozonikus része az (5.90) dekompozíciónak megfelelő speciális tereket tartalmazza. Ennek az elméletnek a neve: IIB típusú szupergravitáció mely egy 10 dimenziós $N=2$ superszimmetriával, 32 azonos kiralitású superszimmetria generátorral rendelkező térelmélet.

Az elméletben az alábbi terek szerepelnek: a Φ dilaton melynek várható értéke a g_s húr csatolással kapcsolatos, a B 2-forma potenciál $H_3 = dB$ térerősséggel, a G metrika, a C_p , $p =$

²⁸ $p = 0, 1, 2, 3, 4$ -re $\binom{8}{p} = 1, 8, 28, 56, 70$. $p = 4$ esetén az öndualitás kényszere megfelezi a szabadsági fokok számát.

0, 2, 4 p-forma potenciálok $F_p = dC_p$ térerősségekkel, plusz fermionikus terek melyekkel egyenlőre nem foglalkozunk. Vezessük be az alábbi jelöléseket

$$\mathcal{T} = C_0 + ie^{-\Phi}, \quad F_3^i = (H_3, F_3)^T, \quad \tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3 \quad (5.91)$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\text{Im}\mathcal{T}} \begin{pmatrix} |\mathcal{T}|^2 & -\text{Re}\mathcal{T} \\ -\text{Re}\mathcal{T} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.92)$$

Ekkor a IIB típusú szupergravitációt leíró hatás bozonikus része²⁹

$$\begin{aligned} S_{\text{bozonikus}}^{IIB} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} R \\ &- \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \frac{1}{\text{Im}\mathcal{T}^2} d\mathcal{T} \wedge *d\bar{\mathcal{T}} - \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \mathcal{M}_{ij} F_3^i \wedge *F_3^j \\ &- \frac{1}{8\kappa_{10}^2} \int \varepsilon_{ij} C_4 \wedge F_3^i \wedge F_3^j - \frac{1}{8\kappa_{10}^2} \int \tilde{F}_5 \wedge *\tilde{F}_5 \end{aligned} \quad (5.93)$$

ahol megmutatható [Pol98], hogy

$$\kappa_{10} = 8\pi^{7/2} \alpha'^2 g_s. \quad (5.94)$$

Három fontos megjegyzést kell itt tennünk. Az egyik az, hogy a fermionikus terek hatásával kiegészített fenti hatás csak fa gráf szinten³⁰ szolgáltatja a IIB elmélet tömeggel nem rendelkező módusaira vonatkozó alacsony energiás hatást. Magasabb rendű kvantum korrekciókkal mi itt nem foglalkozunk. A másik megjegyzésünk arra vonatkozik, hogy a fenti hatás rendelkezik egy rejtett $SL(2, \mathbb{R})$ szimmetriával. Ennek során amennyiben \mathcal{T} törtlineáris módon a $(H_3, F_3)^T$ pedig dubletként transzformálódik (a többi mennyiség változatlan marad) akkor a hatás invariáns lesz. Ennek a csoportnak a diszkrét $SL(2, \mathbb{Z})$ részcsoportja az S-dualitási csoport. Egy fontos sejtés szerint a IIB elmélet S-dualitási szempontból öndualis. A harmadik megjegyzés: a fenti hatás az öndualitás kényszerét nem építi magába. A klasszikus mozgásegyenletek szintjén az öndualitás kényszerét a hatás variálása után kell kikötnünk. Ekkor a korrekt mozgásegyenleteket kapjuk. Egy kovariáns hatás is konstruálható (az (5.93) hatás nem az) ennek ismertetését illetően a [JHS07] könyv megfelelő hivatkozásaira utalunk.

A IIB elméletben megjelenő p-forma potenciálok jelentőségét illetően emlékeztetünk arra, hogy ezek a potenciálok természetes módon $p-1$ dimenziós membránokhoz, $p-1$ bránokhoz csatolódnak. Valóban az elektrodinamika $q \int A$ integráljára gondolva azonnal látjuk, hogy az egy q töltéssel rendelkező pontszerű objektum (0-brán) 1-formához (vektorpotenciál) történő csatolását írja le. Továbbá egy q töltésű és m tömegű "teszt részecske"³¹ rögzített elektromágneses térbeli viselkedését az elektrodinamikából ismert

$$S_{\text{eldin}} = -m \int_{\mathcal{P}} ds + q \int_{\mathcal{P}} A - \frac{1}{4\kappa_0^2} \int F \wedge *F \quad (5.95)$$

teljes hatás írja le. Ez azt is mutatja, hogy a téregyenleteket adó harmadik és a csatolást leíró második tagon kívül a 0-brán által beseper \mathcal{P} világvonal (1-dimenziós) területét is a hatásba kell írunk. Ennek alapján egy négydimenziós részsokaságot adó "teszt három brán" természetes módon csatolódik a C_4 potenciálhoz és ekkor a "naív" teljes hatás

$$S_{\text{3brane}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{\kappa_{10}} \int d^4\xi \sqrt{-\text{Det } h_{\alpha\beta}} + \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa_{10}} \int C_4 - \frac{1}{8\kappa_{10}^2} \int F_5 \wedge *F_5 \quad (5.96)$$

²⁹Az alábbi hatásban R a G metrikából képzett skalár görbület.

³⁰Ez azt jelenti, hogy a g_s húr csatolási állandóban és α' -ben csak a vezető rendet tartjuk meg.

³¹Ez a kifejezés azt jelenti hogy a részecske elektromágneses erőter módosító hatásától eltekintünk.

alakot ölti ahol

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) = G_{AB}(\sigma) \frac{\partial x^A}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^B}{\partial \sigma^\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \quad A, B = 0, 1, \dots, 9 \quad (5.97)$$

a brán világfelületén a beágyazó téridő metrika által indukált metrika.

Figyeljük meg, hogy az (5.96) hatásban a konstansokat speciálisan választottuk, ahol amennyiben κ_{10} -et az (5.94) egyenlet definiálja a hatást be kell tudnunk ágyazni a IIB húrelméletbe. Valóban, az 1990-es évek derekán felfedezték, hogy a megfelelő dimenziós Dirichlet p -bránok (Dp -bránok) a IIB elmélet nemperturbatív szabadsági fokaiként természetes módon megjelennek. Ezeknek az eredményeknek köszönhetően a dolgozatban szerepet játszó három bránoknak az alacsonyenergiás effektív elméletbe történő konzisztens beágyazása ismert. Ez azt jelenti, hogy amennyiben teszt-három bránok viselkedését szeretnénk leírni az (5.93) hatáshoz két másik tagot kell hozzáírunk. Az egyik tag a Dirac-Born-Infeld hatás mely³² úgy kapható, hogy a (5.96) kifejezés első tagjában a $h_{\alpha\beta} \mapsto h_{\alpha\beta} + e^{-\Phi/2} B_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' e^{-\Phi/2} F_{\alpha\beta}$ helyettesítést végezzük el. Itt $B_{\alpha\beta}$ a Kalb-Ramond tér világfelületre történő visszahúzottja, $F_{\alpha\beta}$ pedig a brán felületén élő Abeli mértéktér. A másik tag az (5.96) kifejezés második tagja amennyiben benne a $C_4 \mapsto C_4 + (2\pi\alpha' F + B) \wedge C_2 + (2\pi\alpha' F + B)^2 C_0 + \dots$ helyettesítést végezzük el³³. Ezekből az eredményekből azt látjuk, hogy amennyiben feltesszük, hogy a C_4 teret leszámítva a többi térnek nincsenek forrásai és a három bránok téridő metrikára gyakorolt visszahatásától eltekintünk, akkor az effektív IIB elméletben a (5.96) hatást kell használnunk a megfelelő konstansokkal [JHS07].

5.5. Az effektív négy dimenziós hatás

5.5.1. Effektív hatás és toroidális kompaktifikáció . Az (5.93) hatás egy tíz téridő dimenziós effektív elméletet ír le. Ahhoz, hogy kapcsolatot létesítsünk a mi effektív négy dimenziós világunkkal az extra dimenziók szerkezetére feltevéseket kell tennünk. Ennek a dolgozatnak a második felében az összefonódottság és a toroidális kompaktifikáció kapcsolatát vizsgáljuk, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy az extra dimenziós X sokaság egy hat dimenziós T^6 tórusz vagy $T^2 \times T^2 \times T^2$. Az 5.3.2. és 5.3.3. fejezetek alapján ekkor X kohomológiája összefonódottság elméleti interpretációval rendelkezik. A 7. fejezetben azonban ki fog derülni, hogy az összefonódottsággal kapcsolatos fejtegetéseink egy sokkal általánosabb Calabi-Yau sokaságokat is magába foglaló kontextusban is jelentőséggel bírnak.

A kompaktifikáció során a szokásos ansatz $M \times X$ ahol M a négydimenziós Minkowski téridő. A Kaluza-Klein programnak megfelelően az (5.93) hatásban előforduló tíz dimenziós tereket az X harmónikus formái szerint kell kifejtenuünk. A kifejtések során megjelenő módusok az egyes terek fluktuációit írják le. A terek kifejtési basisvektorainak számát (a harmónikus formák terének dimenzióit) a $h_{r,s}$ Hodge számok határozzák meg. T^6 esetén például a térfogati (Kähler) deformációkkal kapcsolatos Hodge számok $h_{0,0} = h_{3,3} = 1$, $h_{1,1} = h_{2,2} = 9$, a térfogatot őrző (komplex struktúra) deformációkkal kapcsolatos Hodge számok pedig $h_{3,0} = h_{0,3} = 1$, $h_{1,2} = h_{2,1} = 9$. A $h_{r,s}$ Hodge számok az X -en adott $g_{a\bar{b}}$ metrika deformációs paramétereinek számával kapcsolatosak. A metrika $\delta g_{a\bar{b}}$ variációi $h_{1,1}$ számú Kähler, illetve a δg_{ab} variációkkal kapcsolatos $h_{2,1}$ számú komplex struktúra paramétert adnak. Például $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ esetén $h_{2,1} = h_{1,1} = 3$ és a metrika τ^a modulus terekkel parametrizált alakja

$$ds_X^2 = 2g_{a\bar{b}} dz^a d\bar{z}^{\bar{b}} = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{y^a} |du^a + \tau^a dv^a|^2, \quad g_{a\bar{b}} = \frac{1}{2y^a} \delta_{a\bar{b}} \quad (5.98)$$

³²Amennyiben a görbülettel kapcsolatos korrekcióktól eltekintünk.

³³A pontozott tagok görbületi korrekciók [CBG99].

illetve a Kähler forma

$$J = ig_{a\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}}. \quad (5.99)$$

J kifejezéséből látszik, hogy a $h_{1,1} = 3$ -nak megfelelő 3 bázis forma: $dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{a}}$, $a = 1, 2, 3$ és a $h_{2,1} = 3$ -nak megfelelő formákat illetően lásd az (5.37)-(5.39) egyenletek bal oldali oszlopát.

Természetesen a harmonikus formák szerinti kifejtésekben a valós bázist is használhatjuk, így például három-formák esetén az (5.50)-(5.51) bázist. Például az (5.93)-ban szereplő $F_5 = dC_4$ öt-formával kapcsolatos C_4 négy-forma kifejtése

$$\mu^4 C_4 = A = \mathcal{A}^I \wedge \alpha_I + \mathcal{B}_I \wedge \beta^I + \dots \quad (5.100)$$

ahol a pontok további két és négy formák szerinti kifejtéseket jelentenek. A fenti kifejtésben az $\mathcal{A}^I(x)$ és $\mathcal{B}_I(x)$ négy dimenziós koordinátáktól függő egy-formák az öndualitás $*F_5 = F_5$ kényszere miatt nem függetlenek. A továbbiakban alapvető mennyiségeknek az \mathcal{A}^I egy-formákat tekintjük. Nyilvánvalóan ezek Abeli mértékterek (Maxwell-terek). A μ tömegskála paramétert azért vezettük be, hogy a négy dimenziós formák dimenziótlan mennyiségek legyenek.

A tíz dimenziós II típusú húrelméletek toroidális kompaktifikációja [HT95] során kapott elmélet a négydimenziós $N = 8$ szupergravitáció³⁴. Ennek az elméletnek mely 28 Abeli vektorteret és 70 skalárteret tartalmaz egy $E_{7(7)}$ on-shell szimmetriája van. A modulusterek (skalárterek) a 70 dimenziós $E_{7(7)}/SU(8)$ faktortér geometriájával rendelkeznek, ez az elmélet teljes modulus tere. A skalárterek közül 9 a tórusz komplex modulusait írja le. Principálisan polarizált tóruszok esetén 6 komplex (12 valós) modulussal kell számolnunk. Az $N = 8$ elméletnek létezik konzisztens $N = 2$ csonkítása. A csonkított elmélet modulustere $X = T^6$ esetén a 12 dimenziós $Sp(6, \mathbf{R})/U(3)$ a $T^2 \times T^2 \times T^2$ esetén a 6 dimenziós $(SL(2, \mathbf{R})/SO(2))^3$ faktortér lesz. Ezek a modulusterek egy komplex szimmetrikus τ^{ab} mátrix 6 (T^6) illetve ezen mátrix 3 ($T^2 \times T^2 \times T^2$) diagonális elemeinek valós és képzetes részéből állnak elő. Az (5.31), (5.61) és (5.79) egyenletek értelmében az $Sp(6, \mathbf{R})$ és $SL(2, \mathbf{R})^{\times 3}$ csoportok az összefonódás képen valós SLOCC csoportok szerepét fogják játszani. Megmutatható, hogy a csonkítás után az eredetileg 28 Abeli mértéktér helyett csak 7 (T^6) illetve 4 ($T^2 \times T^2 \times T^2$) marad. Jelöljük ezeket az (5.100)-ból már ismert mértéktereket és a nekik megfelelő térerősségtenzorokat $\mathcal{A}^I = \mathcal{A}_\mu^I dx^\mu$ -vel illetve $\mathcal{F}^I = d\mathcal{A}^I$ -vel ahol $I = 0, 1, \dots, 6$ (T^6) illetve $I = 0, 1, 2, 3$ ($T^2 \times T^2 \times T^2$).

Megmutatható, hogy az így kapott effektív négydimenziós $N = 2$ szupergravitációs elmélet bozonikus sektora a fenti tereken kívül csak a négydimenziós görbült téridő $g_{\mu\nu}$ metrikáját tartalmazza³⁵. A továbbiakban szerepet játszó négydimenziós terek tehát (T^6)

$$g_{\mu\nu}(x), \quad \mathcal{A}_\mu^I(x), \quad \tau^{ab}(x) \quad I = 0, 1 \dots 6, \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (5.101)$$

illetve ($T^2 \times T^2 \times T^2$)

$$g_{\mu\nu}(x), \quad \mathcal{A}_\mu^I(x), \quad \tau^a(x) \quad I = 0, 1, 2, 3, \quad a = 1, 2, 3 \quad (5.102)$$

ahol a második eset komplex skalárterei az első eset diagonális elemei. A két eset $\mathcal{A}_\mu^I(x)$ vektortereinek egymáshoz való viszonyát illetően lásd [CGRT12].

³⁴Megjegyezzük, hogy ez az $N = 8$ elmélet a IIA dualitási rendszerben sokkal egyszerűbben, az öndualitás kényszerével kapcsolatos komplikációktól mentesen megkapható. Tekintettel azonban arra, hogy a IIB képen az összefonódottsággal kapcsolatos fizikai tartalom jobban látszik ezért mi ezt választjuk. Mivel azonban a IIA és IIB dualitási rendszereket a "tükörszimmetriának" nevezett nemtriviális dualitási szimmetria köti össze az a komplikáció nem érinti a dolgozat lényegét.

³⁵Az effektív négydimenziós bozonikus hatás a fent említett úgynevezett vektormultipllett tereken kívül még hipermultipllett tereket is tartalmaz. Ilyen terek keletkeznek például ha az (5.100) egyenletben a kipontozott tagokat is figyelembe vennénk. Ezek a terek azonban a használt csonkításban konzisztens módon lecsatolódnak. Érdekes módon ezen lecsatolódnó terek közé tartozik a IIB húr csatolási állandóval kapcsolatos (5.91)-ben definiált Φ dilaton tér is.

5.5.2. STU model . A fent tárgyalt terekkel kifejezett négydimenziós effektív hatás bozonikus részét az alábbi alakba írhatjuk [Den00]

$$S_{4D} = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_{M_4} d^4x \sqrt{-g} R - \frac{1}{\kappa_4^2} \int_{M_4} G_{a\bar{b}} d\tau^a \wedge *d\bar{\tau}^{\bar{b}} - \frac{1}{4\gamma^2} \int_{M_4} \mathcal{F}^I \wedge \mathcal{G}_I \quad (5.103)$$

ahol

$$\kappa_4^2 = \kappa_{10}^2 / \text{Vol}(X), \quad \gamma = \kappa_{10} \mu^4 \quad (5.104)$$

és

$$\mathcal{G}_I = \Re \mathcal{N}_{IJ} \mathcal{F}^J + \Im \mathcal{N}_{IJ} * \mathcal{F}^J. \quad (5.105)$$

A komplex szimmetrikus \mathcal{N}_{IJ} mátrix a τ^{ab} skalár (moduli) terektől függ. Az alábbiakban a mátrix explicit alakját csak az $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ esetben adjuk meg³⁶

$$\Re \mathcal{N}_{IJ} = \begin{pmatrix} 2x_1x_2x_3 & -x_2x_3 & -x_1x_3 & -x_1x_2 \\ -x_2x_3 & 0 & x_3 & x_2 \\ -x_1x_3 & x_3 & 0 & x_1 \\ -x_1x_2 & x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

$$\Im \mathcal{N}_{IJ} = -y_1y_2y_3 \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^2 & -\frac{x_1}{y_1^2} & -\frac{x_2}{y_2^2} & -\frac{x_3}{y_3^2} \\ -\frac{x_1}{y_1^2} & \frac{1}{y_1^2} & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{y_2^2} & 0 & \frac{1}{y_2^2} & 0 \\ -\frac{x_3}{y_3^2} & 0 & 0 & \frac{1}{y_3^2} \end{pmatrix} \quad (5.107)$$

ahol (5.32)-nek megfelelően $\tau_a = x_a - iy_a$ és

$$G_{a\bar{b}} = \frac{\delta_{a\bar{b}}}{(2y^a)^2} = \partial_a \partial_{\bar{b}} K, \quad K = -\log(8y_1y_2y_3). \quad (5.108)$$

A fenti modellben szereplő $\tau^a, a = 1, 2, 3$ három komplex skalárteret gyakran az S, T és U betűkkel jelölik ezért a modell irodalomban használatos neve: STU-modell.

A (5.103) hatás tagjainak jelentése az alábbi. Az első tag a szokásos Einstein-Hilbert hatás melyben a négy dimenziós téridő metrikájával számolt skalár görbület szerepel. A második tag egy nemlineáris szigma modell szokásos szerkezetét mutatja. Valóban, az integrandus alatti tag $\sqrt{-g} G_{a\bar{b}} \partial_\mu \tau^a(x) \partial_\nu \bar{\tau}^{\bar{b}} g^{\mu\nu}(x) d^4x$ alakba írható mely olyan komplex skalárterek szokásos kinetikus tagja melyek értékeit egy speciális target sokaságon vesszük fel. Esetünkben a speciális target sokaság az X komplex struktúra deformációival kapcsolatos \mathcal{M} modulus tér a $G_{a\bar{b}}$ Weil-Peterson metrikával. A harmadik tag azon része melyben $\Im \mathcal{N}$ szerepel több Maxwell-szerű tér olyan hatása melyben a csatolások a modulusterektől függenek. A maradék tag a részecske fizikából már ismeretes az elektromos és mágneses dualitást teljessé tevő úgynevezett θ -tag ugyancsak modulustól függő csatolásokkal.

A metrika szerinti variáció olyan Einstein egyenleteket szolgáltat melynek jobb oldalán álló energia-impulzus tenzor a Maxwell-szerű tereken kívül a skalárterek nemtriviális járulékát is tartalmazza. Látni fogjuk, hogy az Einstein egyenletek speciális esetekben megoldhatók és az utóbbi tereknek köszönhetően fekete lyukakat leíró téridő konfigurációkat adnak. A hatás skalárterek szerinti variációja során kapható egyenletek különösen fontosak lesznek számunkra. Ezek a nemlineáris egyenletek olyan attraktorokat írnak le melyeknek szerkezetében három és négy-qubit rendszerekkel kapcsolatos geometriai struktúrák jelennek meg. Ezek a struktúrák jelentősen megkönnyítik a fekete lyuk megoldások szerkezetének vizsgálatát.

³⁶Az \mathcal{N} mátrix szerkezetét Calabi-Yau sokaságok segítségével történő kompaktifikáció esetén az úgynevezett $N = 2$ speciális Kähler-Hodge geometria rögzíti [CDF96]. A fenti speciális formulák $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ esetén ebből az általános formalizmusból kaphatók.

5.5.3. A statikus ansatz . Az összefonódottsággal kapcsolatos struktúrák vizsgálatát az (5.103) hatásból származtatható Euler-Lagrange egyenletek megoldásainak tanulmányozása útján végezzük el. Ezen egyenletek matematikai szerkezetét már régóta vizsgálják [BMG88], a területtel kapcsolatos kutatás jelenleg is igen aktív (lásd például a [CGRT12] munkát és az ott hivatkozott referenciákat). Az alábbiakban a jólismert [BKR⁺96] statikus, gömbszimmetrikus és aszimptotikusan Minkowski geometriát leíró úgynevezett extrémális BPS-fekete lyukakat³⁷ leíró megoldásokat szeretnénk vizsgálni összefonódottság elméleti módszerekkel. Jóllehet az összefonódottsággal kapcsolatos struktúrák jelentőségét először az (5.103) hatással kapcsolatos négy dimenziós képből ismerték fel [Duf07, KL06, 4] a későbbiekben kiderült [9], hogy az (5.93) és az (5.96) eredeti hatásokkal kapcsolatos tíz dimenziós képből ezen struktúrák fizikai jelentése sokkal tisztábban látszik. Ebben az alfejezetben tehát négy dimenziós statikus, gömbszimmetrikus, aszimptotikusan Minkowski, extrémális BPS fekete lyukakat szándékozunk megérteni ebben a tíz dimenziós képből.

Első lépésként megjegyezzük, hogy az (5.103)-ben megjelenő $\mathcal{F}^I \wedge \mathcal{G}_I$ tag tíz dimenziós eredete nyilvánvalóan (5.96) utolsó tagja kellene hogy legyen. Ez a tag azonban az öndualitás kényszeréről nem mond semmit. Amint említettük ezt a kényszeret a mozgásegyenletek szintjén utólag szokták implementálni. Azonban ha az alább ismertetendő öndualitást is magába foglaló kompaktifikációs ansatzot (5.96) utolsó tagjába helyettesítjük zérust kapunk nem pedig az $\mathcal{F}^I \wedge \mathcal{G}_I$ tagot. Ez a probléma azzal kapcsolatos, hogy már a tíz dimenziós effektív képből sem ismeretes az öt-formára vonatkozó öndualitás kényszerét a hatás szintjén implementáló *egyszerű* dualitás invariáns formalizmus.

Ismeretes azonban [HT88, BH99], hogy amennyiben hajlandóak vagyunk a manifeszt Lorentz kovariancia elvét feláldozni, akkor ennek a tagnak a kezelésére már található egy dualitás invariáns formalizmus. Ezt szerencsére kihasználhatjuk hiszen bennünket csak a statikus megoldások érdekelnek melyek az általánosabb stacionárius megoldások speciális esetei, ezekre pedig a manifeszt Lorentz kovariancia sérül. Ekkor ugyanis létezik egy időszerű Killing vektor mely a téridőt "térre és időre" bontja.

Legyen tehát $M_4 = M_3 \times \mathbb{R}$. A metrikára vonatkozó legáltalánosabb statikus gömbszimmetrikus ansatz ekkor az alábbi alakú

$$ds^2 = -e^{2U(r)} dt^2 + e^{-2U(r)} \left(\frac{1}{f^2(r)} dr^2 + r^2 ds_{S^2}^2 \right), \quad ds_{S^2}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.109)$$

ahol $r \rightarrow \infty$ esetén $U(r) \rightarrow 0$ és $f(r) \rightarrow 1$ fejezi ki azt, hogy az általunk vizsgált téridő aszimptotikusan Minkowski azaz "lapos". Vezessük be az új

$$r = \frac{c}{\sinh c\varrho}, \quad f(r) = h(\varrho) \cosh c\varrho \quad (5.110)$$

változókat. Ekkor

$$ds^2 = -e^{2U(\varrho)} dt^2 + e^{-2U(\varrho)} \left(\frac{1}{h^2} \frac{c^4}{\sinh^4 c\varrho} d\varrho^2 + \frac{c^2}{\sinh^2 c\varrho} ds_{S^2}^2 \right) \quad (5.111)$$

ahol most a $\varrho \rightarrow 0$ esetén $h(\varrho) \rightarrow 1$ illetve $U(\varrho) \rightarrow 0$.

Feltesszük továbbá azt is, hogy a modulus terek és az abeli mértékterek is gömbszimmetrikusak. A modulus terekre ez azt jelenti, hogy $\tau^{ab}(\varrho)$ illetve $\tau^a(\varrho)$. A mértékterek gömbszimmetrikusságából és az öndualitásból következik, hogy amennyiben az F_5 öt-forma tértől függő részét

$$\mathbf{F} = \frac{\gamma}{\sqrt{4\pi}} \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \otimes \Gamma \in \wedge^2(M_3) \otimes H^3(X) \quad (5.112)$$

³⁷Az utóbbi két kifejezésnek a jelentését a későbbiekben adjuk meg.

alakba írjuk akkor a megfelelő ansatz

$$F_5 = \mathbf{F} + *\hat{\mathbf{F}} = \frac{\gamma}{\sqrt{4\pi}}(\sin\theta d\theta \wedge d\varphi \otimes \Gamma + \frac{e^{2U}}{h}d\varrho \wedge dt \otimes \hat{\Gamma}) \quad (5.113)$$

ahol a hatdimenziós X tóruszokon élő α három-formára a Hodge csillagot az $\hat{\alpha}$ szimbólummal jelöltük.

5.5.4. A csavarodási számok fizikai jelentése . A 3-bránok statikus háttéren zajló tíz dimenziós dinamikáját a IIB elméleten belül az (5.96) hatás három tagja írja le. Ugyanakkor tudjuk, hogy az X homológia ciklusaira tekeredő 3-bránok összefonódottság elméleti interpretációval is rendelkeznek. A két kép kapcsolatának megértéséhez első lépésként tisztáznunk kell az (5.56) és (5.71) összefonódott állapotoknak megfelelő Γ kohomológia elemekben szereplő p^I és q_I mennyiségek fizikai jelentését. Mint tudjuk a p^I és a q_I mennyiségek jelentése a tíz dimenziós képen: csavarodási számok. A kérdés most az, hogy ha az (5.96) hatás második tagjába behelyettesítjük az (5.100) kompaktifikációs ansatzot mi lesz az így előálló négydimenziós képen ezeknek a csavarodási számoknak a fizikai interpretációja? Tekintsük tehát az (5.96) hatás második tagját. Egy 3-brán jellemezhető egy $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \times M_3 \times X$ leképezéssel. Legyen ennek a leképezésnek a lokális koordinátás alakja (statikus mértékben)

$$f : (\sigma^0, \sigma^i) \mapsto (x^\mu(\sigma^0), u^a(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), v^a(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)) \quad (5.114)$$

Az $x^\mu(\sigma^0)$ rész a négydimenziós téridő egy \mathcal{P} pályáját, az u^a, v^a tórusz koordinátákat tartalmazó rész a 3-brán csavarodási konfigurációját írja le. Ekkor írható, hogy

$$\int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{C}_3} f^* A = \int_{\mathcal{P}} \int_{f(\mathcal{C}_3)} A = \int_{\mathcal{P}} \int_X \Gamma \wedge A = \int_{\mathcal{P}} (p^I \mathcal{B}_I - q_I \mathcal{A}^I) \quad (5.115)$$

ahol $f(\mathcal{C}_3)$ a Γ kohomológia elem Poincaré duáltja és felhasználtuk az (5.49) és az (5.100) kifejezéseket. Az eredményül kapott hatás egy-formák \mathcal{P} mentén történő integráljainak összegeként áll elő. Az összeg minden egyes tagja az elektrodinamikából ismert (5.95)-szerű tag, mely a \mathcal{P} mentén propagáló elektromos és mágneses töltésekkel rendelkező részecske egy-forma terekhez történő csatolását írja le. Tehát az 5.3. fejezetben tárgyalt összefonódott állapotokban megjelenő q_I és p^I mennyiségek fizikai jelentése a IIB képen: *elektromos* és *mágneses töltések*. Ezt az ismeretet az összefonódottsági képpel kombinálva látjuk, hogy (5.60) és (5.71) alapján ezek a töltések egy három-qubit illetve egy hat módusú három-fermion "töltés" állapotba szervezhető.

Megjegyezzük, hogy összhangban az (5.96)-ból származtatható mozgásegyenletekkel könnyen megmutatható, hogy az $r = 0$ ban elhelyezkedő a Γ -nak megfelelő homológia ciklusra feltekeredett statikus 3-brán által keltett gömbszimmetrikus F_5 tér éppen (5.113).

5.5.5. A Dirac-Born-Infeld hatás fizikai jelentése . A négydimenziós effektív kép fizikájának további tisztázásához tekintsük most az (5.96) első tagjának a DBI hatásnak az analízisét. Ennek elvégzéséhez tekintsük ismét egy \mathcal{C}_3 3-brán előző alfejezetben tárgyalt statikus típusú f beágyazását! Ekkor (5.96) első tagját a

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\kappa_{10}} \int_{\mathcal{P}} ds \int_{\mathcal{C}_3} d^3\sigma \sqrt{\text{Det } h_{ij}} \quad (5.116)$$

alakba írhatjuk ahol

$$h_{ij} = g_{m\bar{n}} \frac{\partial z^m}{\partial \sigma^{(i}} \frac{\partial z^{\bar{n}}}{\partial \sigma^{j)}} \quad (5.117)$$

ahol $z^m, m = 1, 2, 3$ az X komplex koordinátái ³⁸. Figyeljük meg, hogy a második integrál a 3-brán V_{D_3} térfogata. Például $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ esetén V_{D_3} számolásához az (5.98) metrikát kell használnunk.

Tegyük most fel, hogy

$$f^*J = 0 \quad (5.118)$$

ahol J az X Kähler formája lásd például (5.99). Ekkor (5.117)-ben a szimmetrizálásra nincs szükség, s így

$$\text{Det } h_{ij} = \text{Det } g_{m\bar{n}} |\text{Det}(\partial_i z^m)|^2 \quad (5.119)$$

Esetünkben az X holomorf háromformája $\Omega_0 = dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$ melynek az f beágyazó leképezés általi visszahúzottja

$$f^*\Omega_0 = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial z^1}{\partial \sigma^i} \frac{\partial z^2}{\partial \sigma^j} \frac{\partial z^3}{\partial \sigma^k} d^3\sigma = \text{Det}(\partial_i z^m) d^3\sigma \quad (5.120)$$

ahol $d^3\sigma = d\sigma^1 \wedge d\sigma^2 \wedge d\sigma^3$. Írható tehát, hogy

$$d^3\sigma \sqrt{\text{Det } h_{ij}} = \sqrt{8 \text{Det } g_{a\bar{b}}} |f^*\Omega_0| = 2\sqrt{2} e^{K/2} |f^*\Omega_0| = 2\sqrt{2} |f^*\Omega| \quad (5.121)$$

ahol kihasználtuk a metrika (5.98) alakját és az (5.34), (5.76) összefüggéseket ³⁹. Ezeket az eredményeket felhasználva kapjuk (5.116) új alakját

$$\frac{\sqrt{8\pi}}{\kappa_{10}} \int_{\mathcal{P}} ds \int_{\mathcal{C}_3} |f^*\Omega| \geq \frac{\sqrt{8\pi}}{\kappa_{10}} \int_{\mathcal{P}} ds \int_{\mathcal{C}_3} f^*\Omega \quad (5.122)$$

Tegyük most fel, hogy az (5.118) feltételen kívül teljesül még az

$$f^*\Omega = e^{i\Phi} \Lambda(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) d\sigma^1 \wedge d\sigma^2 \wedge d\sigma^3 \quad (5.123)$$

feltétel, ahol Φ konstans és a Λ függvény pozitív. Ekkor az (5.122) egyenlőtlenségben egyenlőség teljesül. Fizikai szempontból ez azt jelenti, hogy az X megfelelő $f(\mathcal{C}_3)$ homológia ciklusára feltekeredő 3-brán V_{D_3} térfogata *minimális*. Az (5.118) és (5.123) feltételek tehát adott homológia osztályon belül minimális térfogatú 3-bránokat írnak le. Az X ilyen tulajdonságú ciklusait a matematikában "speciális Lagrange-féle részsokaságok"-nak nevezik. A fizikusok ezekre a ciklusokra, az alább részletezendő okok miatt, mint *szuperszimmetrikus ciklusokra* utalnak [BBS95].

Szuperszimmetrikus ciklusokra

$$\frac{\sqrt{8\pi}}{\kappa_{10}} \int_{\mathcal{P}} ds \int_{\mathcal{C}_3} f^*\Omega = \frac{\sqrt{8\pi}}{\kappa_{10}} \int_{\mathcal{P}} ds \int_{f(\mathcal{C}_3)} \Omega = \frac{\sqrt{8\pi}}{\kappa_{10}} \int_{\mathcal{P}} |Z(\Gamma)| ds \quad (5.124)$$

ahol $f(\mathcal{C}_3)$ a Γ kohomológia elemhez Poincaré duált homológia ciklus és kihasználtuk az (5.81) összefüggést.

Vezessük most be a

$$\kappa_4^2 = 8\pi G_N \quad (5.125)$$

formulával a Newton féle gravitációs konstans ahol κ_4^2 eredetét illetően lásd az (5.104) és az (5.94) egyenleteket, és használjuk ki azt, hogy az általunk használt koordinátákban $\text{Vol}(X) = 1$. Ezekkel a konvenciókkal (5.96) első tagjára kapjuk, hogy

$$S_{DBI} = -\frac{1}{\sqrt{G_N}} \int_{\mathcal{P}} |Z(\Gamma)| ds, \quad M_{BPS} = \frac{|Z(\Gamma)|}{\sqrt{G_N}} \quad (5.126)$$

³⁸Az $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ példa esetén az X és az \mathcal{M} modulustér egyaránt egy hat dimenziós komplex sokaság. Az egyszerűbb jelölés érdekében az előbbi komplex koordinátáit (z^a) és az utóbbi komplex koordinátáit (τ^a) $a = 1, 2, 3$ ekkor ugyanúgy indexeljük. Általában azonban különbséget kell tennünk az X indexek $m, n = 1, 2, 3$ és az \mathcal{M} indexek $a, b = 1, 2, \dots, h_{1,1}$ között. Például már az $X = T^6$ esetén $h_{1,1} = 9$.

³⁹ $\text{Det } g_{m\bar{n}} = 8 \text{Det } g_{a\bar{b}}$, ennek erede $z^a \leftrightarrow \sqrt{2} z^m$ lásd Bodner et.al. munkáját [BCF91].

mely a négy dimenziós téridőben mozgó M_{BPS} tömeggel rendelkező részecskét ír le⁴⁰.

Az (5.54)-(5.57) formulák alapján látható, hogy Z és konjugáltja egy GHZ állapot amplitúdóit határozza meg. Továbbá az (5.53) és (5.58) formulákból az is kiderül, hogy valójában az összes amplitúdó kovariáns deriváltak alkalmazásával legyártható ebből a kitüntetett amplitúdóból. Az összefonódottság elméleti interpretáció alapján az is látható, hogy ezek a kovariáns deriváltak (5.24)-(5.20) projektív bit flip és fázis flip hibákat implementálnak. Ez az interpretáció nyilván alkalmazható az $X = T^6$ fermionikus állapotokra vezető esetére is. Sőt a Freudenthal rendszerekkel kapcsolatos (5.81)-(5.82) képleteket követő megjegyzések alapján gyanítható, hogy az összefonódottsági analógia további általánosítások esetén is működik. A hűrelméleti kép a fenti ismeretekhez egy új és fontos ismeretet ad. A Z GHZ amplitúdók abszolútértéke megfelelő egységekben egy olyan magasabb dimenziós objektumot (3-brán) ír le mely az effektív négy dimenziós világunkban egy M_{BPS} tömegű részecskeként viselkedik. Felmerül a kérdés, mi a hűrelméleti képben az egyéb amplitúdók fizikai jelentése? Erre a kérdésre majd az attraktor mechanizmus ismertetése során kapjuk meg a választ.

5.5.6. Az öt formákra vonatkozó hatás fizikai jelentése . A 3-bránok tíz dimenziós dinamikájából következő négydimenziós kép fizikájának és az összefonódottság elmélet kapcsolatának megértéséhez már csak (5.96) utolsó tagját kell vizsgálnunk. Jelöljük a Hodge csillag operációt M_3 -on a $*_3$ szimbólummal. Tehát például a $*_3 \hat{\mathbf{F}}$ mennyiség egy négy-forma. Legyen F_1 és F_2 két $\mathbb{R} \times M_3 \times X$ -en élő öt-forma. Statikus esetben célszerű bevezetni ezen formák térszerű részeinek az alábbi szorzatát⁴¹

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = e^U \int_X \mathbf{F}_1 \wedge *_3 \hat{\mathbf{F}}_2. \quad (5.127)$$

Figyeljük meg, hogy $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ egy M_3 -on élő három-forma. Ebből fakadóan statikus kompaktifikációs ansatz esetén az (5.103)-ben megjelenő utolsó tag helyes tíz dimenziós reprezentánsa

$$-\frac{1}{4\gamma^2} \int dt \int_{M_3} (\mathbf{F}, \mathbf{F}) \quad (5.128)$$

ahol \mathbf{F} az (5.96) utolsó tagjában megjelenő F_5 öt-forma (5.112) térszerű része⁴². Megmutatható [HT88, BH99, Den00], hogy a fenti hatás variálásával már az öndualitás kényszerével kombinált helyes mozgásegyenleteket kapjuk.

Számoljuk most ki az (5.128) hatást! Mivel $*_3(\sin \theta d\theta \wedge d\varphi) = e^U(\varrho) d\varrho/h(\varrho)$ ezért

$$-\frac{1}{4\gamma^2} \int dt \int_{M_3} (\mathbf{F}, \mathbf{F}) = -\frac{T}{4} \int d\varrho \frac{e^{2U(\varrho)}}{h(\varrho)} \|\Gamma(\varrho)\|^2 \quad (5.129)$$

ahol például az $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ választással $\|\Gamma(\varrho)\|^2$ az (5.61) három-qubit állapotvektor normanégyzete és T az eltelt idő. A normanégyzet explicit kifejezését és a megfelelő skalárszorzat eredetét illetően lásd az (5.59) és az (5.22) formulákat. Az irodalomban a

$$V_{BH} = \frac{1}{2} \|\Gamma\|^2 \quad (5.130)$$

mennyiséget "fekete lyuk potenciálnak" nevezik. Az (5.60)-(5.63) képletekből láthatóan a fekete lyuk potenciál a töltésektől és a modulusoktól függ. Mivel statikus megoldások esetén a modulusok a ϱ radiális koordinátától függenek ezért: $V_{BH}(\varrho)$. Megjegyezzük, hogy a fekete

⁴⁰ A BPS rövidítés a Bogomolny-Prasad-Sommerfield hármas neveire utal. Az úgynevezett BPS megoldásokat a következő fejezetekben részletesen tárgyaljuk.

⁴¹ Stacionárius esetben is definiálhatunk egy ilyen szorzatot, ez azonban az általunk használt kifejezésnél jóval bonyolultabb [GKKP11]. Ezt a kifejezést F. Denef használta először [Den00].

⁴² Az (5.128) hatás a [Den00]-ben használt általános (3.6) hatásból kapható a statikus esetben.

lyuk potenciál explicit alakját a húrelméleti irodalomban a Kähler-Hodge speciális geometria [CDF96] (5.106)-(5.107) mátrixaival szokás kifejezni

$$V_{BH} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p^J & q_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I + RI^{-1}R)_{JK} & -(RI^{-1})^K_J \\ -(I^{-1}R)^J_K & (I^{-1})^{JK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^K \\ q_K \end{pmatrix} \quad (5.131)$$

ahol $R = \Re \mathcal{N}$ és $I = \Im \mathcal{N}$ az (5.106)-(5.107)-ben definiált mátrixok. Figyeljük meg, hogy az $I = \Im \mathcal{N}$ mátrix *negatív definit*⁴³ összhangban azzal, hogy V_{BH} pozitív. A V_{BH} mennyiség (5.130) összefonódottság elméleti interpretációja először a [6] dolgozatban jelent meg.

Ezzel befejeztük az (5.96) hatás tagjainak analizisét. Eredményül az 5.3 fejezet összefonódott állapotainak a IIB képbeli fizikai interpretációját kaptuk. Az eredményeket az (5.115), (5.126) és a (5.130) egyenletek foglalják össze. Természetesen a fekete lyukak tárgyalásához az (5.96) hatáshoz még hozzá kell vennünk az (5.103) első két tagját is. A következő alfejezetben ezeknek a tagoknak az analizisét végezzük el.

5.5.7. Az effektív dinamikai rendszer Értékeljük ki (5.103) első tagját! Ehhez szükségünk van a Ricci skalár kifejezésére. Az (5.111) kifejezést felhasználva kapjuk, hogy

$$R = 2he^{2U} \frac{\sinh^4 c\varrho}{c^4} \left(\ddot{U} - h(\dot{U}^2 - c^2) - 2c\dot{h} \coth c\varrho + \frac{c^2}{\sinh^2 c\varrho} \left(h - \frac{1}{h} \right) \right) \quad (5.132)$$

$$\sqrt{-g} = e^{-2U} \frac{1}{h} \sin \theta \frac{c^4}{\sinh^4 c\varrho} \quad (5.133)$$

ahol $\dot{U} = \frac{d}{d\varrho} U(\varrho)$. Az integrálásokat elvégezve a felületi tagokat elhagyva és az (5.125) definíciót felhasználva az (5.103) hatás végső alakja

$$\frac{S_{4D}}{T} = \frac{-1}{2G_N} \int_0^\infty d\varrho \left[h(\dot{U}^2 + G_{a\bar{b}} \dot{\tau}^a \dot{\bar{\tau}}^{\bar{b}} - c^2) + G_N \frac{e^{2U}}{h} V_{BH} - \frac{c^2}{\sinh^2 c\varrho} \left(h + \frac{1}{h} - 2 \right) \right] \quad (5.134)$$

Egy komplex K^a vektorra definiáljuk a vektor G normáját

$$\|K\|_G \equiv G_{a\bar{b}} K^a \bar{K}^{\bar{b}} \quad (5.135)$$

mely a G metrikával ellátott komplex \mathcal{M} modulus tér vektorainak hossz négyzete. Ezzel a jelöléssel az (5.134) kifejezést h szerint variálva majd a $h = 1$ mértékválasztást használva kapjuk az alábbi kényszert

$$\dot{U}^2 + \|\dot{\tau}\|_G^2 - G_N e^{2U} V_{BH} = c^2 \quad (5.136)$$

illetve a

$$\frac{S_{4D}}{T} = -\frac{1}{2G_N} \int_0^\infty d\varrho (\dot{U}^2 + \|\dot{\tau}\|_G^2 - c^2 + G_N e^{2U} V_{BH}) \quad (5.137)$$

mértékrögzített hatást⁴⁴.

Idézzük most fel Γ Hodge diagonális bázisban történő (5.53) kifejtését és az (5.54)-(5.59) összefüggéseket! Ezek segítségével a hatásban szereplő fekete lyuk potenciálra az új

$$V_{BH} = |Z|^2 + G^{a\bar{b}} D_a Z \bar{D}_{\bar{b}} \bar{Z} = |Z|^2 + 4G^{a\bar{b}} \partial_a |Z| \bar{\partial}_{\bar{b}} |Z| \quad (5.138)$$

összefüggést kapjuk. Az utolsó egyenlőség bizonyításához kihasználtuk, hogy

$$D_a Z = 2e^{i\alpha} \partial_a |Z|, \quad Z = e^{i\alpha} |Z|, \quad Z = e^{K/2} W \quad (5.139)$$

ahol a W mennyiség holomorf tehát $\partial_a \bar{W} = 0$.

⁴³Tekintettel arra, hogy $y_a > 0$ ez az (5.107) formulából az $x_a = 0$ speciális esetben azonnal látható.

⁴⁴Megmutatható, hogy a fenti mértékszimmétrie eredete a radiális koordinátában végrehajtható $\varrho \mapsto \varrho + \varepsilon(\varrho)$ infinitezimális reparametrizáció invariancia.

5.6. BPS fekete lyukak

5.6.1. Extremális BPS fekete lyukak . A következőkben a modulusterekre vonatkozó (5.137) hatásból származtatható Euler-Lagrange egyenletek speciális tulajdonságú, úgynevezett BPS megoldásait vizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy ezen egyenleteknek és a téridőgeometriára vonatkozó egyenleteknek a megoldásai extremális fekete lyukakat írnak le.

Első lépésként az (5.137) hatást az új (5.138) összefüggés felhasználásával teljes négyzetté alakíthatjuk

$$\begin{aligned} \frac{S_{4D}}{T} &= \frac{-1}{2G_N} \int_0^\infty d\varrho \left[(\dot{U} \pm \sqrt{G_N} e^U |Z|)^2 + \|\dot{\tau}^a \pm 2\sqrt{G_N} e^U G^{a\bar{b}} \bar{\partial}_{\bar{b}} |Z|\|_G^2 - c^2 \right] \\ &\pm \frac{e^U}{\sqrt{G_N}} |Z|_{\varrho=0}^{\varrho=\infty}. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Amennyiben a ϱ paramétert egyfajta "radiális evolúció" időparaméterének tekintjük akkor az (5.137) hatás egy $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ -en mozgó olyan "részecskét" ír le mely a $-e^{2U} V_{BH}$ potenciálban mozog⁴⁵. Az (5.136) kényszer a teljes energia megmaradását fejezi ki. Az $-e^{2U} V_{BH}$ potenciál lokális minimumánál azaz az $e^{2U} V_{BH}$ lokális maximumánál oszcilláló "mozgást" várunk. Az $e^{2U} V_{BH}$ lokális minimumánál exponenciálisan elszálló megoldások várhatók *kivéve* azt a figyelemre méltó esetet amikor a $\varrho = 0$ -ban előírt határfeltételek finomhangolásának következtében a részecske pontosan akkora energiával rendelkezik, hogy a mozgás következtében $\varrho \rightarrow \infty$ -re hajszálpontosan az $-e^{2U} V_{BH}$ -nak megfelelő lokális maximum tetején landol. Az ilyen lokális minimumokat az $e^{2U} V_{BH}$ kritikus pontjai között kell keresnünk.

A kritikus pontok egy fontos speciális esetét kapjuk ha azok az (5.126) tömeggel kapcsolatos $|Z|$ mennyiség kritikus pontjaival kapcsolatosak. Az (5.138) képletből láthatóan az ilyen kritikus pontok automatikusan V_{BH} *speciális* kritikus pontjait szolgáltatják⁴⁶. Az olyan "finomhangolt" véges energiájú megoldásokat melyek a $|Z|$ kritikus pontjaiból jövő minimumokkal kapcsolatosak *BPS szolitonoknak* fogjuk hívni⁴⁷. A $|Z|$ Hessian mátrixának a kritikus pontban felvett értékeinek vizsgálatával megmutatható [FGK97], hogy mivel $G_{a\bar{b}}$ pozitív definit a kritikus pontok mindig minimumok. Ismételten emlékeztetünk arra a tényre, hogy a fenti megoldásokban kardinális szerepet játszó Z mennyiség és konjugáltja (5.54) és (5.57) alapján a $|\Gamma\rangle$ összefonódott háromrészecskés állapot GHZ amplitúdói.

A (5.140) egyenletből láthatóan rögzített c és a határon előírt rögzített modulus értékekre a hatás extremális ha⁴⁸

$$\dot{U} = -\sqrt{G_N} e^U |Z|, \quad \dot{\tau}^a = -2\sqrt{G_N} e^U G^{a\bar{b}} \bar{\partial}_{\bar{b}} |Z| \quad (5.141)$$

(látni fogjuk, hogy a másik előjel választás fizikai szempontból elfogadhatatlan megoldásokra vezet). Ekkor az (5.136) egyenletből következik, hogy $c = 0$ s így (5.110) miatt

$$\varrho = \frac{1}{r}, \quad ds^2 = -e^{2U(r)} dt^2 + e^{-2U(r)} d\mathbf{x}^2. \quad (5.142)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy a kritikus pontban

$$|Z|_{crit} \equiv |Z_*| \neq 0 \quad (5.143)$$

⁴⁵Az \mathbb{R} részt az U az \mathcal{M} részt pedig a τ^a komplex struktúra modulusok paraméterezik.

⁴⁶ V_{BH} -nak nyilván létezhetnek olyan kritikus pontjai is melyek nem kapcsolódnak $|Z|$ kritikus pontjaihoz. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ezek adják az úgynevezett nem-BPS megoldásokat.

⁴⁷Ez az egyik oka, hogy a $|Z|$ -vel kapcsolatos (5.126) mennyiséget már korábban BPS tömegnek hívtuk.

⁴⁸Természetesen az (5.137) hatás variálásával kapott mozgásegyenleteknek egyéb megoldásai is vannak. Megmutatható, hogy a teljes négyzetté történő kiegészítéssel kapott speciális megoldások pontosan a fentebb definiált BPS megoldásokat adják.

azaz a GHZ amplitúdók $\varrho \rightarrow \infty$ esetén nem tűnnek el⁴⁹. Ekkor (5.141) első egyenletéből a $\varrho \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow 0$) limeszben kapjuk hogy

$$\varrho^{-1} e^{-U(\varrho)} \rightarrow \sqrt{G_N} |Z_*| \quad (5.144)$$

Az ívelemnégyzet ebben a limeszben a Bertotti-Robinson [Ber59, Rob59] metrika alakjára hozható

$$ds^2 \rightarrow -\frac{r^2}{G_N |Z_*|^2} dt^2 + G_N |Z_*|^2 \frac{dr^2}{r^2} + G_N |Z_*|^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.145)$$

Ez az ívelemnégyzet egy $\sqrt{G_N} |Z_*|$ sugarú gömböt ($S^2 = SO(3)/SO(2)$) és egy kétdimenziós anti-deSitter teret ($AdS_2 = SO(2,1)/SO(1,1)$) ír le⁵⁰. Tehát a téridő geometriája az $r \rightarrow 0$ limeszben: $AdS_2 \times S^2$.

Megmutatható [JHS07], hogy a fenti Bertotti-Robinson (BR) alak az extrémális négy dimenziós Reissner-Nordström (RN) fekete-lyukat leíró metrika eseményhorizont-közeli részét írja le. Az általunk használt koordinátákban az eseményhorizont az $r = 0$ ($\varrho = \infty$) koordinátaértéknél található. Mint ismeretes az Einstein egyenletek RN típusú fekete-lyuk megoldása a szokásos Schwarzschild fekete-lyuk megoldás azon általánosítása amikor a fekete lyuk tömegén (M) kívül elektromos töltéssel is (Q) rendelkezik⁵¹. Az úgynevezett csupasz szingularitás⁵² lehetőségének elkerülése érdekében fenn kell, hogy álljon az $M\sqrt{G_N} \geq |Q|$ egyenlőtlenség. A megoldás a radiális koordinátában (R) a szokásos fizikai görbületi tenzorban is jelentkező szingularitáson kívül ($R = 0$) két nem fizikai koordinátaszingularitással is rendelkezik ($R = R_+$ illetve $R = R_-$). Ezek két horizontot adnak. Az $R = R_+$ -val jellemzett *külső horizont* az eseményhorizont. Amennyiben $R_+ = R_-$ a RN megoldás *extrémális*. Ekkor

$$M\sqrt{G_N} = |Q|, \quad R_0 \equiv R_{\pm} = G_N M \quad (5.146)$$

Az extrémális RN fekete lyuk közel-horizont viselkedésének analízise azt mutatja [JHS07], hogy a metrika az $r = R - R_0$ radiális transzformációval valóban a BR alakra hozható amennyiben

$$M = \frac{|Z_*|}{\sqrt{G_N}} \quad (5.147)$$

Ezt összevetve az (5.126) összefüggéssel látjuk hogy a fekete lyuk tömege megegyezik az M_{BPS} tömeg horizonton felvett értékével. Ebből következik, hogy az extremalitást kifejező $M\sqrt{G_N} \geq |Z|$ egyenlőtlenség szaturálása az (5.122) egyenlőtlenség szaturálásával kapcsolatos. Mivel az utóbbi szaturáció pontosan akkor teljesül ha a 3-bránok minimális térfogatu szuperszimmetrikus ciklusokra tekerednek sejtjük, hogy a BPS megoldások eredete a szuperszimmetriában keresendő. Látni fogjuk, hogy ez a sejtés valóban igaz.

A fekete lyukak termodinamikája [BCH73] szerint a fekete lyukak nemzérus Hawking hőmérséklettel [Haw75b] és entrópiával [Bek73b, Bek74] rendelkeznek. Az előbbi a fekete lyuk horizontjának felszíni gravitációs térerősségével az utóbbi az eseményhorizont felszínével arányos⁵³

$$S_{BH} = \frac{A}{4G_N} \quad (5.148)$$

⁴⁹Amennyiben eltűnnek ismét nem-BPS megoldásokat kapunk. Ezt a lehetőséget később vizsgáljuk meg.

⁵⁰Valóban, az $\tilde{r} = G_N |Z_*|^2 / r$ koordinátatranszformáció után a ds^2 első két tagja a $(\sqrt{G_N} |Z_*| / \tilde{r})^2 [-dt^2 + d\tilde{r}^2]$ alakba is írható, mely az AdS_2 egyik megszokott reprezentációja.

⁵¹A megoldás általánosítható mágneses töltésekkel rendelkező fekete lyukakra is. Egy tetszőleges fekete lyukat a tömegén, elektromos és mágneses töltésén kívül még az impulzusmomentuma jellemezheti.

⁵²Az $R = 0$ -ban lévő fizikai szingularitás a "gyenge kozmikus cenzúra hipotézis" [Wal84] szerint sosem "csupasz", mindig horizont veszi körül.

⁵³A $k_B = c = \hbar = 1$ egységrendszerben dolgozunk.

Extremális RN fekete lyukra a Hawking hőmérséklet ugyan zérus [JHS07] az entrópia azonban

$$S_{BH} = \frac{4\pi R_0^2}{4G_N} = \pi G_N M^2 = \pi G_N M_{BPS}^2 \quad (5.149)$$

Az általunk vizsgált speciális esetben teljesül az (5.147) feltétel ezért⁵⁴

$$S_{BH} = \pi |Z_*|^2 \quad (5.150)$$

azaz a fekete lyuk entrópiát a $|\Gamma\rangle$ állapot GHZ amplitúdójának horizonton felvett értékének abszolút érték négyzete határozza meg. Az (5.54)-(5.55) és (5.81)-(5.82) formulákból láthatóan azonban az entrópia meghatározásához meg kellene határoznunk a modulusok horizonton felvett értékét. Mivel a RN fekete lyukat kizárólag a tömege és a töltések értéke jellemzi és az extremáltság miatt a tömeg és a töltések nem függetlenek, ezért a modulusok horizonton felvett értékét ki kellene tudnunk fejezni kizárólag a p^I és q_I töltésekkel. A következő alfejezetben azt a mechanizmust tárgyaljuk mely ezt lehetővé teszi.

5.6.2. Az attraktor mechanizmus . A BPS attraktor mechanizmus vizsgálatához célszerű az (5.141) mozgásegyenleteket egy az összefonódottsággal kapcsolatos információt is tükröző tíz dimenziós képből felírni. Az alábbi analízist az $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ -nek megfelelő STU-modellre végezzük el, az $X = T^6$ esetben a megfelelő formulák értelemszerűen adódnak⁵⁵. Tekintsük a Γ kohomológia elem (5.53) Hodge diagonális bázisban történő kifejtését és a megfelelő $|\Gamma\rangle$ három-qubit állapotot! Ez a kifejtés (5.139) felhasználásával a

$$|\Gamma\rangle = e^{-i\alpha} \left(-|Z||000\rangle + 2\bar{\partial}_{\frac{1}{2}}|Z||001\rangle + 2\bar{\partial}_{\frac{2}{2}}|Z||010\rangle + 2\bar{\partial}_{\frac{3}{2}}|Z||100\rangle \right) + \text{c.c.} \quad (5.151)$$

alakba írható ahol $Z = e^{i\alpha}|Z|$. Figyeljük meg, hogy (5.46)-(5.47) miatt $\overline{|000\rangle} = -|111\rangle$, $\overline{|001\rangle} = -|100\rangle$ stb. Tekintsük most az

$$\frac{d}{d\varrho} [e^{-U}(e^{-i\alpha}|000\rangle - e^{i\alpha}|111\rangle)] \simeq -\sqrt{G_N}|\Gamma\rangle \quad (5.152)$$

egyenletet! A \simeq jel azt jelenti, hogy a jobb és bal oldalon álló kifejezések kohomológok, azaz csak egy egzakt forma erejéig definiáltak. Amennyiben ezt az egyenletet balról skalárisan szorozzuk a $|001\rangle, |010\rangle, |100\rangle$ vektorokkal és kihasználjuk az ortogonalitást akkor az (5.141) második egyenletrendszerét kapjuk $a = 1, 2, 3$ -ra. Ha a fenti egyenletet balról a $|000\rangle$ vektorral szorozzuk akkor az egyenlet valós részéből (5.141) első egyenletét kapjuk a képzetes részből pedig az

$$\frac{d\alpha}{d\varrho} + i\langle 000|\frac{d}{d\varrho}|000\rangle \equiv \frac{d\alpha}{d\varrho} + \mathcal{A}_B(\varrho) = 0 \quad (5.153)$$

egyenletet⁵⁶. Az utóbbi egyenlet azt fejezi ki, hogy az \mathcal{M} modulustér bármely görbéje mentén lezajló $\varrho = 0$ -ban kezdődő és $\varrho = \infty$ -ben végződő radiális "evolúció" során a normált $e^{-i\alpha}|000\rangle$ állapot parallel transzlált a Berry konnexióra nézve. Az \mathcal{A}_B Berry-féle egy-forma számítása az alábbi eredményre vezet

$$\mathcal{A}_B = \Im(\partial_a \mathcal{K} d\tau^a) \quad (5.154)$$

⁵⁴A BR alakból is láthatóan az eseményhorizont egy S^2 melynek sugara $\sqrt{G_N}|Z_*|$ ebből (5.148) felhasználásával ismét (5.150) adódik.

⁵⁵Sőt az alábbi levezetések (jóllehet az összefonódottság elméleti interpretáció nem annyira nyilvánvaló) mint látni fogjuk tetszőleges X Calabi-Yau sokaságra is megállják a helyüket.

⁵⁶A skaláris szorzás az X koordinátákra történő integrálást jelent. Ennek során az egzakt formák integrálja zérus, s így az (5.141) egyenleteket már egyenlőséggel kapjuk. Figyeljük meg azt is, hogy az $U, \alpha, |000\rangle, |111\rangle$ mennyiségek mindegyike függ ϱ -tól. Azonban $|\Gamma\rangle$ független ϱ -tól, lásd (5.49) egyenlet.

azaz a Berry-féle konnexió megegyezik az úgynevezett királis konnexióval [Den00]. Az (5.35) egyenletben ezt a konnexiót használtuk fel a kovariáns deriváltak felépítéséhez. Megjegyezzük, hogy a Berry-féle görbületi két-forma

$$\mathcal{F}_B = d\mathcal{A}_B = J_{\mathcal{M}} = i\partial\bar{\partial}\mathcal{K} = iG_{a\bar{b}}d\tau^a \wedge d\bar{\tau}^{\bar{b}} \quad (5.155)$$

épp az (5.108) Weil-Pettersson metrikával kapcsolatos Kähler forma.

Az (5.141) egyenletek összesen $2h_{2,1} + 1$ egyenletet jelentenek, a vizsgált speciális esetben 7 egyenletet. Az (5.152) egyenlet azonban az (5.153) egyenlettel együtt $2h_{2,1} + 2$ egyenletet adott, esetünkben 8 egyenletet. Ez nem meglepő hiszen a $H^3(X, \mathbb{R})$ dimenziója $2h_{2,1} + 2$, ami annak felel meg, hogy (5.151)-ben nyolc lineárisan független bázisvektor szerint fejthettünk ki. Ahhoz, hogy a fenti redundanciát megfelelően kezeljük az alábbi módon járunk el. Tekintsük az új

$$|\Delta\rangle = e^{-i\alpha}e^{-U} \left(-\dot{U}|000\rangle + \dot{\tau}^1|001\rangle + \dot{\tau}^2|010\rangle + \dot{\tau}^3|100\rangle \right) + c.c. \quad (5.156)$$

három-qubit állapotot! Ekkor (5.151)-ből azonnal látható, hogy a

$$|\Delta\rangle + \sqrt{G_N}|\Gamma\rangle = 0 \quad (5.157)$$

egyenlet ekvivalens az (5.141) BPS egyenletekkel⁵⁷. Könnyen belátható, hogy

$$|\Delta\rangle d\varrho = 2\Re \left[(d + i\mathcal{A}_B + i d\alpha)(e^{-U}e^{-i\alpha}|000\rangle) \right] \quad (5.158)$$

Ebből a BPS egyenletek új alakja

$$2\Re \left[(d + i\mathcal{A}_B + i d\alpha)(e^{-U}e^{-i\alpha}|000\rangle) \right] = -\sqrt{G_N}|\Gamma\rangle d\varrho \quad (5.159)$$

Ha ezt az egyenletet balról skalárisan megszorozzuk $\langle *|\Gamma| \rangle$ -val akkor $\langle *|\Gamma| \rangle = 0$ miatt⁵⁸ az (5.153) egyenletet kapjuk és ezzel az (5.159) az eredetileg vizsgált (5.152) egyenletre vezet.

Továbbá mivel

$$2\Re \langle \Delta|\Gamma \rangle = e^{-2U} \frac{d}{d\varrho} (4e^U |Z|) \quad (5.160)$$

ezért az (5.140) hatás az

$$\frac{S_{4D}}{T} = \frac{-1}{4G_N} \int_0^\infty d\varrho e^{2U} \left(\|\Delta + \sqrt{G_N}\Gamma\|^2 + \frac{e^U}{\sqrt{G_N}} |Z| \right) \Big|_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} \quad (5.161)$$

alakba is írható. Ez a hatás stacionárius ha az (5.157) BPS egyenletek teljesülnek. Ezekről pedig már láttuk, hogy őket az elegáns (5.152) alakban célszerű vizsgálni.

Tekintsük tehát az (5.152) egyenletet! Az egyenlet jobb oldala nem függ a ϱ -tól ezért integrálható

$$e^{-U}(e^{-i\alpha}|000\rangle - e^{i\alpha}|111\rangle) \simeq -\sqrt{G_N}|\Gamma\rangle \varrho + [e^{-i\alpha}|000\rangle - e^{i\alpha}|111\rangle] \Big|_{\varrho=0} \quad (5.162)$$

ahol kihasználtuk, hogy a téridő aszimptotikusan Minkowski azaz $e^{-U(0)} = 1$. Ezt az egyenletet radiális koordinátákba visszaírva az

$$e^{-U}(e^{-i\alpha}|000\rangle - e^{i\alpha}|111\rangle) \simeq -|H(r)\rangle, \quad |H(r)\rangle \equiv \frac{\sqrt{G_N}}{r} |\Gamma\rangle + |\Gamma'\rangle \quad (5.163)$$

alakban célszerű vizsgálni. Itt az újonnan bevezetett $|\Gamma'\rangle$ állapot a határfeltételeket a p'^I, q'_J "aszimptotikus töltések" segítségével jellemzi. Ez azt jelenti, hogy célszerű $|\Gamma'\rangle$ -t is az (5.61) alakba írni

$$|\Gamma'\rangle = \mathcal{S}_3 \otimes \mathcal{S}_2 \otimes \mathcal{S}_1 |\gamma'\rangle \quad (5.164)$$

⁵⁷A $\hat{a} = 1, 2, 3$ "lapos" indexes képleteket írjuk vissza az $a = 1, 2, 3$ "görbült" indexes kifejezésekre.

⁵⁸Ez legegyszerűbben onnan látszik, hogy a fenti skalárszorzat épp $\int_X \Gamma \wedge \Gamma = 0$, és $\int_X \Gamma \wedge \Omega = e^{\mathcal{K}/2} Z = e^{i\alpha} |Z|$. Mivel $|000\rangle \leftrightarrow -i\Omega$ és $\Re(-iz) = \Im(z)$ az állítás azonnal adódik.

ahol a p^I, q'_I mennyiségeket (5.60)-hoz hasonló módon rendezzük el. Így ezek egy Hodge diagonális bázisban felírt $|\gamma'\rangle$ "aszimptotikus töltés" állapotot definiálnak. Legyen

$$|H(r)\rangle = \mathcal{S}_3(r) \otimes \mathcal{S}_2(r) \otimes \mathcal{S}_1(r)|h(r)\rangle, \quad |h(r)\rangle \equiv \frac{\sqrt{G_N}}{r}|\gamma\rangle + |\gamma'\rangle \quad (5.165)$$

A $|h(r)\rangle$ állapotban szereplő $\sqrt{G_N}p^I/r + p'^I$ és $\sqrt{G_N}q_I/r + q'_I$ harmonikus függvények a BPS megoldások szerkezetében fontos szerepet játszanak [Sab98, BLS98].

Számoljuk most ki az (5.163) egyenlet jobb és bal oldalának Cayley hiperdeterminánsát! Mivel $\text{Det } \mathcal{S}_a = i$ ezért (2.93) figyelembe vételével a jobb oldalra kapjuk hogy

$$D(H(r)) = -D(h(r)) \quad (5.166)$$

A bal oldalon egy GHZ állapot áll megszorozva $e^{-U(r)}$ -vel. Kihasználva a (2.92) explicit formulát kapjuk hogy a baloldalra ez a mennyiség $e^{-4U(r)}$. Kombinálva a két oldalt az (5.142) közelhorizont viselkedést meghatározó metrikában szereplő $e^{-2U(r)}$ gyűrési faktor alakja

$$e^{-2U(r)} = \sqrt{-D(h(r))} \quad (5.167)$$

Ennek a kifejezésnek csak akkor van értelme ha a gyökjel alatt álló mennyiség pozitív. Ez azt jelenti, hogy a nyolc $(\sqrt{G_N}p^I/r + p'^I$ és $\sqrt{G_N}q_I/r + q'_I)$ harmónikus függvényből (5.60) segítségével képzett (2.92) kifejezés negatív kell hogy legyen. Mivel

$$\lim_{r \rightarrow \infty} D(h(r)) = D(\gamma') = -1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^4 D(h(r)) = G_N^2 D(\gamma) \quad (5.168)$$

ezért a töltésekből és az aszimptotikus töltésekből képzett Cayley hiperdeterminánsoknak negatívaknak, illetve az utóbbinak még -1 -re normálnak is kell kennie. Azt kaptuk tehát, hogy csak a $D(\gamma) < 0$ feltételt kielégítő töltés-csavarodási szám konfigurációk adhatnak BPS megoldásokat. Továbbá, ha most az (5.163) egyenletet balról skalárisan megszorozzuk $\langle * \Gamma |$ -vel akkor $\langle * \Gamma | \Gamma \rangle = 0$ kihasználásával és a baloldal eltűnésével⁵⁹ kapjuk hogy

$$p^I q'_I - q_I p'^I = 0. \quad (5.169)$$

Kombináljuk most az (5.144), (5.167) és (5.168) egyenleteket! Kapjuk, hogy

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 e^{-2U(r)} = G_N \sqrt{-D(\gamma)} = G_N |Z|_*^2. \quad (5.170)$$

Ezzel (5.150) felhasználásával a BPS fekete lyuk Bekenstein-Hawking entrópiaformulája [Duf07]

$$S_{BH} = \pi \sqrt{-D(\gamma)} \quad (5.171)$$

ahol a töltésekkel kifejezett explicit alak [BKR+96]

$$\begin{aligned} D(\gamma) = & (p^0 q_0 + p^1 q_1 + p^2 q_2 + p^3 q_3)^2 \\ & - 4((p^1 q_1)(p^2 q_2) + (p^2 q_2)(p^3 q_3) + (p^3 q_3)(p^1 q_1)) \\ & + 4p^0 q_1 q_2 q_3 - 4q_0 p^1 p^2 p^3. \end{aligned} \quad (5.172)$$

Tudjuk, hogy $\tau_{123} = 4|D(\gamma)|$ egy a három-qubit összefonódottságot jellemző mérték: az úgynevezett hármas összefonás⁶⁰. A BPS esetben $\tau_{123} = -4D$ tehát

$$S_{BH} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tau_{123}(\gamma)} \quad (5.173)$$

azaz a Bekenstein-Hawking entrópia egy összefonódottsági mértékkel kapcsolatos [Duf07, KL06, 4].

⁵⁹Lásd az előző oldal 61.-es lábjegyzetét.

⁶⁰Mivel esetünkben az állapotok nem normáltak a 4-es faktornak csak kozmetikai jelentősége van. A normált esetben teljesül a (2.91) összefüggés.

Figyeljük most meg, hogy az (5.163) egyenletből következik, hogy az $r \rightarrow 0$ közel horizont ($\varrho \rightarrow \infty$) határátmenetet véve teljesül az (5.144) feltétel ezért az $r \rightarrow \infty$ aszimptotikus ($\varrho = 0$) *határfeltételektől függetlenül* a horizonton mindig teljesül a

$$[\bar{Z}|000\rangle - Z|111\rangle]_* \simeq -|\Gamma\rangle \quad (5.174)$$

egyenlet, ahol a $[\cdot]_*$ jelölés arra utal, hogy a zárójelben lévő mennyiségek horizonton felvett értékét kell tekintenünk.

A (5.174) összefüggésből számos fontos következtetést vonhatunk le. Először is ez az egyenlet implicit módon meghatározza a modulusok horizonton felvett értékét a töltések függvényében. Másodszor ezek az értékek nem függenek a modulusok aszimptotikus értékeitől. Ez azt jelenti, hogy a modulusokra vonatkozó (5.141) egyenletek attraktorokat írnak le [FKS95, FK96a, FK96b, FGK97]. A modulusok horizonton felvett értékeit ezek *stabilizált értékeinek* szokták hívni. Harmadszor, mivel a jobboldal nem függ a modulusoktól (lásd (5.49)) ezért a jobboldalt bármilyen bázisban így a Hodge diagonális modulusfüggő bázisban is kiértékelhetjük. Értékeljük ki ezt az oldalt is a horizonton! Ekkor az (5.53) összefüggés felhasználásával látjuk, hogy a $|\Gamma\rangle$ állapotnak csak a $|000\rangle, |111\rangle$ GHZ-szerű komponensei lesznek zérustól különbözőek. Valóban

$$|\Gamma\rangle \simeq -\bar{Z}_*|000\rangle_* + Z_*|111\rangle_* \quad (5.175)$$

miatt

$$\Gamma_{001*} = \Gamma_{010*} = \Gamma_{100*} = \Gamma_{110*} = \Gamma_{101*} = \Gamma_{011*} = 0 \quad (5.176)$$

ahol ezeknek az amplitúdóknak az explicit alakját illetően lásd az (5.57)-(5.58) formulákat. A fenti amplitúdók a Freudenthal rendszereknél megismert alapvető fontosságú (5.55) $W(\tau^1, \tau^2, \tau^3)$, $W(\bar{\tau}^1, \tau^2, \tau^3)$ stb. mennyiségek horizonton felvett értékeivel fejezhetők ki. Mivel ezek csak a töltésektől és a komplex modulusok horizonton felvett értékétől függenek, ezért ezek azok az egyenletek melyek a stabilizált modulusértékeket mint a töltések függvényeit implicit módon meghatározzák.

Az (5.53) és (5.57)-(5.58) kifejezésekből az is látszik, hogy az (5.176) feltételek egy másik alakja a Z mennyiség kovariáns deriváltjainak horizonton történő eltűnésével kapcsolatos, azaz ezek a feltételek a $D_a Z|_* = 0$ alakba is írhatók. Azonban (5.139) miatt ezek az egyenletek épp azt mutatják, hogy $|Z|$ a horizonton extrémális tulajdonságú. Mivel azonban

$$\frac{d}{d\varrho}|Z| = \dot{\tau}^a \partial_a |Z| + \dot{\bar{\tau}}^{\bar{a}} \bar{\partial}_{\bar{a}} |Z| = -4\sqrt{G_N} G^{a\bar{b}} \partial_a |Z| \bar{\partial}_{\bar{a}} |Z| \leq 0 \quad (5.177)$$

ezért⁶¹ a $|Z|$ egyre csökkenve a horizonton egy minimális értékhez konvergál. Az (5.141) egyenletek miatt tehát $\dot{\tau}_*^a = 0$, azaz a modulusok a $|Z|$ minimumában a horizonton egy fix pontot elérve valóban stabilizálódnak. Figyeljük meg azt is, hogy $|Z|$ a $\sqrt{G_N}$ egységekben vett (5.126) BPS tömeggel is megegyezik, ezért a horizonton M_{BPS} is minimalizálódik. Ez (5.122) értelmében azt is jelenti, hogy a szuperszimmetrikus ciklusra feltekeredett 3-brán térfogata a horizonton minimális.

Különösképpen ezeket a fizikai folyamatokat legfrappánsabb módon az (5.175) egyenlet ragadja meg mely azt mutatja, hogy a Hodge diagonális bázisban az eseményhorizonton egy GHZ állapot "desztillálódik ki" [4]. Figyeljük meg azt is, hogy mivel a modulusok stabilizációját kifejező (5.176) egyenletek a $D_a Z|_* = 0$ alakba is írhatók, ezért ezek az egyenletek az (5.48) egyenletet követő megjegyzés értelmében a modulusok fluktuációja folytán előálló projektív bit-flip hibák lehetőségének kizárását is jelentik. A FLYQM képből tehát a horizonton megjelenő GHZ állapot a bit flip hibákkal szemben stabil. Ez a megfigyelés mely először a [5, 6] dolgozatokban jelent meg a hibajavító kódokkal kapcsolatos további analógiákat sejtet.

⁶¹Kihasználtuk az (5.141) BPS egyenletek másodikát. $G^{a\bar{b}}$ pozitív definit. Egyúttal azt is látjuk, hogy az (5.140) egyenletben valóban csak a felső előjel választás kompatibilis a minimummal.

5.6.3. A modulusok stabilizálása és GHZ állapotok [4]. Ebben az alfejezetben a célunk a modulusok horizonton felvett értékeinek meghatározása a töltések függvényében. Ezeket az értékeket az (5.176) egyenletekből algebrai manipulációkkal kaphatjuk meg [BKR⁺96], létezik azonban egy elegáns összefonódottság elméleti módszer is [17]. Először a jól ismert algebrai módszerrel kapott eredményt és következményeit tárgyaljuk [4]), majd a következő alfejezetben ismertetjük a FLYQM motiválta módszert [17].

Az (5.176) egyenletek alapvető mennyisége (5.57)-(5.58) alapján

$$W(\tau^3, \tau^2, \tau^1) = \gamma_{kji} c^k b^j a^i = \gamma_{kji} \varepsilon^{ii'} \varepsilon^{jj'} \varepsilon^{kk'} c_{k'} b_{j'} a_{i'} \quad (5.178)$$

ahol γ_{kji} töltésekkel való kapcsolatát illetően lásd (5.60) és

$$a_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \tau^1 \end{pmatrix}, \quad b_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \tau^2 \end{pmatrix}, \quad c_k \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \tau^3 \end{pmatrix}.$$

Ezekkel a jelölésekkel az (5.176) egyenletek a

$$\gamma_{kji} \bar{c}^k b^j a^i = 0, \quad \gamma_{kji} c^k \bar{b}^j a^i = 0, \quad \gamma_{kji} c^k b^j \bar{a}^i = 0 \quad (5.179)$$

és a komplex konjugáltjaik alakját öltik. Kihasználva azt hogy γ_{kji} valós megmutatható [BKR⁺96], hogy ezen egyenletek fennállása ekvivalens az alábbi 2×2 -es mátrixok determinánsának eltűnésével

$$\text{Det}(\gamma_{kji} c^k) = 0, \quad \text{Det}(\gamma_{kji} b^j) = 0, \quad \text{Det}(\gamma_{kji} a^i) = 0 \quad (5.180)$$

feltéve, hogy a modulusok képzetes része nem tűnik el⁶². Ezek három másodfokú egyenletet adnak melyeknek azon $\tau^a = x^a - iy^a$ megoldásait kell választanunk⁶³ melyekre az y^a -k pozitívak. Az eredmény

$$\tau_*^a \equiv \tau^a(\infty; p, q) = \frac{(\gamma_0 \cdot \gamma_1)^a \pm i\sqrt{-D}}{(\gamma_0 \cdot \gamma_0)^a}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (5.181)$$

ahol attól függően, hogy a három közül melyik qubitet kezeljük speciálisan⁶⁴

$$(\gamma_0 \cdot \gamma_1)^1 \equiv \gamma_{kj0} \varepsilon^{kk'} \varepsilon^{jj'} \gamma_{k'j'1} \quad (\gamma_0 \cdot \gamma_1)^2 \equiv \gamma_{k0i} \varepsilon^{kk'} \varepsilon^{ii'} \gamma_{k'1i'} \quad (\gamma_0 \cdot \gamma_1)^3 \equiv \gamma_{0ji} \varepsilon^{jj'} \varepsilon^{ii'} \gamma_{1j'i'} \quad (5.182)$$

és

$$D \equiv [\gamma_0 \wedge \gamma_1]^2 = (\gamma_0 \cdot \gamma_1)(\gamma_0 \cdot \gamma_1) - (\gamma_0 \cdot \gamma_0)(\gamma_1 \cdot \gamma_1) \quad (5.183)$$

a (2.110) egyenletből már jól ismert permutáció invariáns Cayley hiperdetermináns.

Az (5.181) eredményből látszik, hogy $y^a \in \mathbb{R}^+$ csak akkor állhat fenn ha $D < 0$. Ez a lehetséges BPS töltéskonfigurációkra a már ismert fontos megszorítást adja⁶⁵. Az y^a pozitivitásából és a $\tau^a = x^a - iy^a$ alakból azonban további megszorítások is adódnak. Nevezetesen a BPS töltéskonfigurációkra a $(\gamma_0 \cdot \gamma_0)^a$ mennyiségek mindegyike pozitív (negatív) és ekkor (5.181)-ban az alsó (felső) előjelet kell választanunk. A 2.5.5. fejezet eredményei alapján tudjuk, hogy ez a BPS eset valós három-qubit állapotokra akkor áll elő ha azok a két lehetséges GHZ osztályból abba az osztályba tartoznak melyek principális null irányai egymás komplex konjugáltjai. Valóban az (5.180) egyenleteket összevetve a (2.109) egyenlettel látjuk, hogy a modulus stabilizáció geometriai jelentése pont a 2.4. ábrán illusztrált null irányok megtalálásával kapcsolatos [4].

A $Z = e^{K/2} W(\tau^3, \tau^2, \tau^1)$ formulában felhasználva a τ_*^a stabilizált értékeket kapjuk, hogy

$$|Z|_*^2 = \sqrt{-D(\gamma)} = \sqrt{(\gamma_0 \cdot \gamma_0)(\gamma_1 \cdot \gamma_1) - (\gamma_0 \cdot \gamma_1)^2}$$

A trialitási szimmetria miatt ezt a mennyiséget bármelyik qubit kitüntetése esetén számolhatjuk. Ezzel (5.150) felhasználásával ismét a BPS fekete lyuk entrópia már jólismert (5.173) kifejezését

⁶²Ez persze mindig igaz, hiszen a modulustér az alsó félsík.

⁶³Lásd (5.32).

⁶⁴Lásd a 2.5.3. fejezetet és a (2.100) egyenletet.

⁶⁵Lásd az (5.168) egyenleteket követő megfontolásokat.

kapjuk. τ_*^a kifejezését használva az is kiderül, hogy a $|\Gamma\rangle$ állapot alakja a horizonton vett Hodge diagonális bázisban az alábbi GHZ-állapot [6, 9]

$$|\Gamma\rangle = (-D(\gamma))^{1/4} (-e^{-i\alpha_*}|000\rangle_* + e^{i\alpha_*}|111\rangle_*)$$

ahol

$$\tan \alpha_* = \sqrt{-D(\gamma)} \frac{-p^0}{2p^1 p^2 p^3 + p^0(p^0 q_0 + p^1 q_1 + p^2 q_2 + p^3 q_3)} = -\frac{p^0}{\tilde{p}^0} \quad (5.184)$$

Figyeljük meg, hogy (4.92) alapján \hat{p}^0 a $|\hat{\gamma}\rangle$ Freudenthal duált állapot megfelelő amplitúdója.

Hangsúlyozzuk, hogy a fent vázolt eredetileg [BKR+96]-ben publikált levezetésben a fekete lyuk entrópia számolása a stabilizált modulusértékek explicit számolásán keresztül történt. Az előző fejezetben ezt néhány egyszerű összefonódottság elméleti trükkel egy sokkal rövidebb úton közvetlenül az (5.163) egyenletből a modulusok számolása nélkül kaptuk. Figyeljük meg azt is, hogy amikor az (5.167) egyenletet levezettük akkor az (5.163) egyenlet mindkét oldalának hármas összefonását véve a bal oldalon csak a téridő a jobb oldalon pedig csak az extra dimenziók geometriájával kapcsolatos információ szerepelt. Tehát a BPS fekete lyuk entrópia számolása egy összefonódottsági mérték segítségével ezt a két különböző jellegű geometriai információt kapcsolta össze.

Az (5.167) képlet a gyűrési faktor teljes r függését megadja. Az (5.163) és az (5.165) kifejezésekből egyszerűen meghatározhatjuk a BPS modulusok teljes r -függését is. Valóban, ha a fenti levezetésben $|\gamma\rangle$ helyett az (5.165)-ben szereplő $|h(r)\rangle$ harmónikus kombinációkat használjuk akkor az r -függő modulusokra (5.178) alakú implicit egyenleteket kapunk. Ezek megoldása ugyanúgy (5.179) alakú egyenletekre vezetnek melyek megoldása

$$\tau^a(r) = \frac{(h_0(r) \cdot h_1(r))^a \pm i\sqrt{-D(h(r))}}{(h_0(r) \cdot h_0(r))^a}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (5.185)$$

ahol a képletben olyan (5.182)-szerű kombinációk szerepelnek melyekben γ -t $h(r)$ -re cseréltük. Természetesen BPS konfigurációkra a $(h_0 \cdot h_0)^a$ mennyiségek mindegyike pozitív (negatív) és ekkor (5.185)-ban az alsó (felső) előjelet kell választanunk.

Tekintsük most ismét az (5.162) egyenletet! Emlékeztetünk, hogy az egyenlet jobb oldalának második tagját a Hodge diagonális bázisban az (5.164) alakba írhatjuk. $|\Gamma'\rangle$ akárcsak $|\Gamma\rangle$ modulusfüggetlen. Valóban $|\Gamma'\rangle$ állapotnak megfelelő kohomológia elem a szokásos (5.49) alakba írható

$$\Gamma' = p'^I \alpha_I + q'_I \beta^I \quad (5.186)$$

mely csak az aszimptotikus töltésektől függ. A Hodge diagonális bázisban azonban $|\Gamma'\rangle$ amplitúdói modulus és így ezeken keresztül r -függők ahol a modulusok r függését illetően lásd az (5.185) egyenleteket. Az $r \rightarrow \infty$ aszimptotikus Minkowski limeszben az (5.162) egyenlet második tagjából láthatóan ismét egy GHZ állapotot kapunk. A Hodge diagonális bázisban tehát a radiális folyam a $|\Gamma\rangle$ állapotra a horizonton, amíg a $|\Gamma'\rangle$ állapotra az aszimptotikusan Minkowski régióra ad egy GHZ állapotot. Összefoglalva:

$$|\Gamma'\rangle = -[e^{-i\alpha}|000\rangle - e^{i\alpha}|111\rangle]_{r=\infty} \quad (5.187)$$

$$|\Gamma\rangle = -|Z_*|[e^{-i\alpha}|000\rangle - e^{i\alpha}|111\rangle]_{r=0} \quad (5.188)$$

ahol a Z horizonton felvett értékére továbbra is az (5.143) jelölést használtuk. Figyeljük meg, hogy a $|\Gamma\rangle$ és $|\Gamma'\rangle$ állapotvektorok $1/\sqrt{2}$ -szeresei a (5.130), (5.138) fekete-lyuk potenciálra illetve egyre normáltak. Ezeknek az állapotvektoroknak a Cayley hiperdeterminánsai rendre

$$D(\Gamma') = -D(\gamma') = 1, \quad D(\Gamma) = -D(\gamma) = |Z_*|^4. \quad (5.189)$$

Mint tudjuk az utóbbi mennyiség (5.171) értelmében a fekete lyuk entrópiát adja. A teljesség kedvéért emlékeztetünk még arra is, hogy az α horizonton felvett értékét az (5.184) kifejezés szolgáltatja.

A fentiek alapján látható, hogy a BPS attraktorok leírásához igazából nem egy hanem két három qubit állapotot célszerű tekinteni. Két attraktorunk van az egyik a horizonton a másik az aszimptotikusan Minkowski tartományban⁶⁶. Célszerű a $|\Gamma\rangle$ és a $|\Gamma'\rangle$ "állapotok" 16 amplitudóját egy négy-qubit állapotba szervezni. Legyen

$$\Phi_{0kji} = \Gamma_{kji}, \quad \Phi_{1kji} = \Gamma'_{kji} \quad (5.190)$$

ekkor a két állapotot összekapcsoló (5.169) kényszer a (2.163) másodrendű négy-qubit invariáns segítségével az [16]

$$I_1(\Phi) = 0 \quad (5.191)$$

alakba is írhatjuk⁶⁷.

5.6.4. Attraktorok eltűnő konkurenciából [17]. A modulusok stabilizációjára nézzük most a másik, az összefonódottsággal kapcsolatos képet. A 2.3. fejezetben a *kevert állapoti* két részrendszeres összefonódottság kapcsán definiáltuk az úgynevezett formációs összefonódottságot. Speciálisan azt is láttuk, hogy ezt a mennyiséget a ρ két qubit kevert állapotra⁶⁸ egy *konkurenciának* nevezett $\mathcal{C}(\rho)$ mennyiségen keresztül (2.68) definiálja. Ha $\mathcal{C}(\rho)$ zérus akkor a formációs összefonódottság is az, és ekkor a kevert állapotunk *szeparálható*.

$\mathcal{C}(\rho) \neq 0$ esetben a formációs összefonódottság sem zérus ekkor kevert állapotunk *összefonódott*. $\mathcal{C}(\rho)$ számolásához a (2.66) formula segítségével elő kell állítanunk a ρ sűrűségmátrix $\tilde{\rho}$ Wootters "spin-flippelt" változatát majd ki kell számolnunk a nemnegatív $\rho\tilde{\rho}$ mátrix sajátértékeinek négyzetgyökét. Ezekkel a konkurencia kifejezését (2.67) adja. Tudjuk azt is, hogy amennyiben a $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{13}$ kevert állapotok egy Ψ három-qubit állapot marginálisaként állnak elő (lásd például a (2.84) formulákat) akkor a Wootters-konkurencia négyzetére a (2.86) formulát kapjuk. A (2.87) definíciók és a (2.91) összefüggés segítségével pedig azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{C}^2(\rho_{ab}) = \tau_{ab} = \text{Tr}(\rho_{ab}\tilde{\rho}_{ab}) - \frac{1}{2}\tau_{123}, \quad a, b \in \{12, 23, 13\}$$

ahol τ_{123} a Ψ kiindulási három-qubit állapot (2.91) hármas-összefonása.

Tekintsük most a $|\Gamma\rangle$ három-qubit állapotot. Az (5.61)-(5.63) definíciók alapján látható, hogy mivel a modulusok függenek az r radiális koordinátától ezért a $|\Gamma\rangle$ Hodge diagonális bázisban vett $\Gamma_{000}, \Gamma_{001}, \dots$ amplitúdói függenek r -től. Célunk a $\rho_{12}(r), \rho_{23}(r), \rho_{13}(r)$ marginálisok meghatározása a Hodge diagonális bázisban, majd a $\tau_{12}(r), \tau_{23}(r), \tau_{13}(r)$ concurrencia négyzetek kiszámítása.

Számoljuk ki például a $\tau_{23}(r)$ mennyiséget! Legyen

$$\Gamma_0 \equiv \begin{pmatrix} \Gamma_{000} & \Gamma_{010} \\ \Gamma_{100} & \Gamma_{110} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 \equiv \begin{pmatrix} \Gamma_{001} & \Gamma_{011} \\ \Gamma_{101} & \Gamma_{111} \end{pmatrix} \quad (5.192)$$

ekkor az (5.183) jelölések felhasználásával⁶⁹

$$\tau_{23} = |(\Gamma_0 \cdot \Gamma_0)|^2 + 2|(\Gamma_0 \cdot \Gamma_1)|^2 + |(\Gamma_1 \cdot \Gamma_1)|^2 - 2|[\Gamma_0 \wedge \Gamma_1]|^2 \quad (5.193)$$

⁶⁶Ezt az attraktort a "végtelenbeli attraktornak" szokás hívni [GLS08a].

⁶⁷Itt kihasználtuk azt, hogy (5.164) és (5.61) miatt I_1 csak a $|\gamma\rangle$ és a $|\gamma'\rangle$ töltésállapotoktól függ.

⁶⁸Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy a ρ szimbólum sűrűségmátrixot, a ϱ szimbólum pedig (5.142) értelmében a radiális koordináta reciprokát jelöli. Mivel ezek egyidejű szerepeltetése zavaró ezért ebben az alfejezetben visszatérünk az r radiális koordináta használatára.

⁶⁹Az egyszerűség kedvéért nem írtuk ki a $(\Gamma_0 \cdot \Gamma_1)^1$ jellegű kifejezésekben a kitüntetett qubitra vonatkozó felső indexeket.

ahol az r függés a Γ amplitúdókon keresztül implicit. A (2.93) transzformációs szabály miatt

$$[\Gamma_0 \wedge \Gamma_1]^2 = -[\gamma_0 \wedge \gamma_1]^2 \quad (5.194)$$

tehát ez a tag csak a töltésektől függ s így r -független. (5.193) r -függő tagjának vizsgálatára a $|\Gamma\rangle$ állapotot Hadamard transzformáljuk⁷⁰

$$|\hat{\Gamma}(r)\rangle = (H \otimes H \otimes H)|\Gamma\rangle = (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{P})(S_3 \otimes S_2 \otimes S_1)|\gamma\rangle \quad (5.195)$$

ahol

$$\mathcal{P}S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{y} & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{y}} & -\frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \quad (5.196)$$

lásd a (2.135) és a (5.30)-(5.31) definíciókat. Az r függő tagra így kapjuk, hogy

$$\text{Tr}(\varrho_{23}\tilde{\varrho}_{23}) = |(a\gamma_0 + b\gamma_1)^2|^2 + |(c\gamma_0 + d\gamma_1)^2|^2 + 2|(a\gamma_0 + b\gamma_1) \cdot (c\gamma_0 + d\gamma_1)|^2. \quad (5.197)$$

Ezt kombinálva az előző taggal

$$\tau_{23}(\hat{\Gamma}) = \frac{1}{(y^1)^2} \left[(\tau^1\gamma_0 - \gamma_1) \cdot \overline{(\tau^1\gamma_0 - \gamma_1)} \right]^2 - 2[\gamma_0 \wedge \gamma_1]^2 - 2|[\gamma_0 \wedge \gamma_1]|^2. \quad (5.198)$$

Tekintsük most azt a speciális esetet amikor

$$[\gamma_0 \wedge \gamma_1]^2 = -D(\gamma) > 0. \quad (5.199)$$

Ekkor

$$\tau_{23} = \left[\frac{1}{y^1} |\tau^1\gamma_0 - \gamma_1|^2 - 2|\gamma_0 \wedge \gamma_1| \right] \left[\frac{1}{y^1} |\tau^1\gamma_0 - \gamma_1|^2 + 2|\gamma_0 \wedge \gamma_1| \right]. \quad (5.200)$$

A triálási szimmetria miatt az összes többi konkurencianégyzet hasonló szerkezetű lesz.

Írjuk a végeredményt az alábbi alakba

$$\tau_{bc}(r) = \tau_{123}(\gamma)[g(\mathcal{M}^a(r), \gamma^a) + 1][g(\mathcal{M}^a(r), \gamma^a) - 1] \quad (5.201)$$

ahol $abc \in \{123, 231, 312\}$ és

$$\mathcal{M}^a = \frac{1}{y^a} \begin{pmatrix} 1 & x^a \\ x^a & (x^a)^2 + (y^a)^2 \end{pmatrix} \quad (5.202)$$

$$\gamma^a = \frac{1}{|\gamma_0 \wedge \gamma_1|} \begin{pmatrix} (\gamma_0 \cdot \gamma_0)^a & (\gamma_0 \cdot \gamma_1)^a \\ (\gamma_0 \cdot \gamma_1)^a & (\gamma_1 \cdot \gamma_1)^a \end{pmatrix} \quad (5.203)$$

továbbá bármely két M, N 2×2 -es matrixra

$$g(M, N) \equiv -\frac{1}{2} \text{Tr}(M\varepsilon N^T\varepsilon). \quad (5.204)$$

Az (5.202)-(5.203) mátrixok mindegyike szimmetrikus és egységnyi determinánsú. Ismeretes, hogy a szimmetrikus valós 2×2 -es mátrixok tere ellátva az (5.204) szimmetrikus nemdegenerált bilineáris formával izomorf a $2 \oplus 1$ dimenziós Minkowski téridővel⁷¹. Valóban, ha

$$M = \begin{pmatrix} T - X & Y \\ Y & T + X \end{pmatrix}$$

akkor $g(M_1, M_2) = X_1X_2 + Y_1Y_2 - T_1T_2$, és $g(M, M) = -\text{Det } M = X^2 + Y^2 - T^2$. Tekintettel arra, hogy $y^a > 0$ a γ^a és \mathcal{M}^a mátrixokhoz asszociált Minkowski hármass-vektorok mindegyike

⁷⁰Nyilván ha a Hodge diagonális bázisban a transzformált állapotot vizsgáljuk az ugyanaz mintha az eredeti állapotot a Hodge bázis Hadamard transzformáltjában vizsgálnánk. Célunk a konkurencia eltűnésének feltételének megtalálása, és ez a feltétel nyilván bázisfüggetlen.

⁷¹Ezzel az izomorfizmussal már találkoztunk két rebít vizsgálatokor, lásd a (2.76) formulát.

időszerű, és az utóbbi vektorok még jövőirányítottak ($\text{Tr}(\mathcal{M}^a) > 0$) is. Időszerű vektorok esetén azonban mindig teljesül, hogy $g(\mathcal{M}, \gamma) \neq 0$ sőt csak az alábbi két lehetőség fordulhat elő [Nab03]

$$g(\mathcal{M}, \gamma) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Tr}(\mathcal{M}) > 0, \quad \text{Tr}(\gamma) > 0 \quad (5.205)$$

$$g(\mathcal{M}, \gamma) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Tr}(\mathcal{M}) > 0, \quad \text{Tr}(\gamma) < 0. \quad (5.206)$$

Ebből az (5.183) és (5.199) egyenletekből következik, hogy vagy γ_0^2 és γ_1^2 mindegyike pozitív vagy mindegyike negatív. Tehát az utóbbi kényszereket (5.199)-vel kombinálva a [BFMY08]-ből ismert BPS töltéskonfigurációkat kapjuk. A fenti alternatíva a konkurrencianégyzet horizonton történő ($r = 0$) eltűnésére pontosan két lehetőséget enged meg

$$\mathcal{M}^a = \pm \gamma^a \quad (5.207)$$

ez pedig azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{y^a(0)} \begin{pmatrix} 1 & x^a(0) \\ x^a(0) & x^a(0)^2 + y^a(0)^2 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{|\gamma_0 \wedge \gamma_1|} \begin{pmatrix} (\gamma_0 \cdot \gamma_0)^a & (\gamma_0 \cdot \gamma_1)^a \\ (\gamma_0 \cdot \gamma_1)^a & (\gamma_1 \cdot \gamma_1)^a \end{pmatrix}. \quad (5.208)$$

Ezek az egyenletek pedig az előző alfejezetben kapott (5.181) egyenletek. Azt a végeredményt kaptuk tehát, hogy a BPS esetben a $|\Gamma\rangle$ állapotra a horizonton vett Hodge diagonális bázisban számolt Wootters konkurrenciák pontosan akkor tűnnek el ha az (5.181) stabilizációs egyenletek fennállnak.

Hasonlítsuk össze a Wootters konkurrencián alapuló FLYQM motiválta képet az (5.179) közvetlen algebrai megoldásán alapuló képpel. Az algebrai képben a megoldással kapcsolatos komplikációk abból fakadnak, hogy az egyes modulusokra vonatkozó információ össze van csatolva. Az egyes konkurrenciák számolása ezt az információt egyetlen modulusra vonatkozó információra csatolja szét. Valóban már (5.198)-ből látható hogy a τ_{23} mennyiség csak a τ^1 modulustól függ, hiszen a τ^2, τ^3 modulusokra vonatkozó információ a τ_{23} konkurrencianégyzet $\mathcal{S}_3 \otimes \mathcal{S}_2 \otimes I_1$ alakú transzformációkra vonatkozó invarianciája miatt kiesik.

Idézzük most fel a (2.96) Coffmann-Kundu-Wootters reláció alapjául szolgáló (2.90) összefüggéseket! Ezekben az összefüggésekben szereplő mennyiségek mindegyikét a Γ állapotra az r -függő Hodge diagonális bázisokban számolva a $\tau_{a(bc)}(r)$ lineáris entrópiákat és a $\tau_{ab}(r)$ konkurrencia négyzeteket kapjuk ahol $a, b, c = 1, 2, 3$. A (2.90) összefüggések miatt és τ_{123} SLOCC invarianciáján alapuló r -függetlensége miatt a

$$\tau_{123} = \tau_{1(23)}(r) - \tau_{12}(r) - \tau_{13}(r) \quad (5.209)$$

összefüggés jobb oldala is r -független⁷². A horizonton $r = 0$ és a konkurrenciák eltűnnek ezért az (5.173) fekete-lyuk entrópia az

$$S_{BH} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tau_{123}(\gamma)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tau_{1(23)}(0)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tau_{2(13)}(0)} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tau_{3(12)}(0)} \quad (5.210)$$

új alakba is írható.

Mi a fenti összefüggés fizikai jelentősége? A FLYQM ideájának [Duf07, KL06] megjelelésekor az (5.173) formula fennállása egy konceptuális problémát vetett fel. A τ_{123} mennyiség fizikai jelentése: reziduális összefonódottság, nem pedig összefonódottsági entrópia. Tehát τ_{123} ugyan egy jó összefonódottsági mérték, azonban első ránézésre nem köthető semmiféle entrópiikus mennyiséghez. Ennélfogva kapcsolata az S_{BH} fekete lyuk entrópiával tisztázásra szorult. A paradoxon feloldása abban áll, hogy hála a (5.210) formulának látható, hogy S_{BH} egy dinamikai folyamat (az attraktor mechanizmus) révén az $r \rightarrow 0$ limeszben előálló lineáris entrópiaként is interpretálható⁷³.

⁷²A permutációs szimmetria miatt még két hasonló reláció is fennáll. Lásd (2.90).

⁷³Ismételten hangsúlyozzuk, hogy az általunk használt állapotok nem normáltak. Így "lineáris entrópia" alatt itt a szokásos definíció $S_2 \equiv 2[(\text{Tr} \rho)^2 - \text{Tr} \rho^2]$ -re történő (2.11)-ben már bevezetett módosítottját értjük.

5.6.5. Szuperszimmetria . Ismeretes, hogy a tárgyalt BPS-fekete lyuk megoldások egyúttal szuperszimmetrikus szolitonok is [Moh01]. Ezek a részecskeszerű véges energiás megoldások kapcsolatban állnak az úgynevezett BPS állapotokkal, melyek a $D = 4$, $N = 2$ szuperszimmetria algebra speciális ábrázolásaival kapcsolatosak. A szuperszimmetria kimerítő tárgyalása nem célja ennek a dolgozatnak. Az alábbiakban csak egy vázlatos képre törekszünk mely megragadja a lényegét.

A $D = 4$ $N = 2$ -kiterjesztett szuperszimmetria algebra [JW83] bennünket érdeklő része

$$\{Q_\alpha^A, Q_{\beta B}^\dagger\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \delta^A_B \quad (5.211)$$

$$\{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} Z^{AB} \quad (5.212)$$

ahol $\alpha, \beta = 1, 2$ és $A, B = 1, 2, \dots, N$. Itt $Q_\alpha^1, \dots, Q_\alpha^N$ N darab spinoriális szuperszimmetria generátor és P_μ a négydimenziós Minkowski téridő szokásos négyes eltolásait generáló operátor. Két szuperszimmetria transzformáció egymás utáni alkalmazása tehát egy téridő eltolást ad⁷⁴. A $Z^{AB} = -Z^{BA}$ operátorok *komplex* komponenseinek neve *centrális töltések*. Ezek az operátorok a szuperszimmetria algebra összes generátorával kommutálnak. A négy $\sigma_{\alpha\beta}^\mu$ 2×2 -es mátrix az egységmátrix, és a három szokásos Pauli mátrix.

Mivel $P^2 = -M^2$ ezért a nyugalmi rendszerben az első egyenlet a

$$\{Q_\alpha^A, Q_{\beta B}^\dagger\} = 2M\delta_{\alpha\beta}\delta^A_B \quad (5.213)$$

alakot ölti. Tegyük fel, hogy N páros. Ekkor a fermionikus rendszereknél már tanulmányozott (3.7) $U(N)$ transzformációval elérhető, hogy a Z mátrix a kanonikus $Z = \text{diag}\{Z_1, \dots, Z_m\} \otimes \varepsilon$ alakú legyen ahol $m = 1, 2, \dots, N/2$ és a Z_m számok valósak és pozitívak. Tegyük fel, hogy a Q generátorok és a Z már eleve ebben a kanonikus bázisban vannak. Ekkor

$$\{Q_\alpha^{am}, Q_\beta^{\dagger bn}\} = 2\delta_{\alpha\beta}\delta^{ab}\delta^{mn}M \quad (5.214)$$

$$\{Q_\alpha^{am}, Q_\beta^{\dagger bn}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{ab}\delta^{mn}Z_n \quad (5.215)$$

ahol⁷⁵ $a, b = 1, 2$.

Az új $\sqrt{2}c^m = Q^{1m} + (\varepsilon Q^\dagger)^{2m}$ és $\sqrt{2}d^m = Q^{1m} - (\varepsilon Q^\dagger)^{2m}$ lineáris kombinációkkal az algebra a

$$\{c_\alpha^m, c_\beta^n\} = \{d_\alpha^m, d_\beta^n\} = \{c_\alpha^m, d_\beta^n\} = 0 \quad (5.216)$$

$$\{c_\alpha^m, c_\beta^{\dagger n}\} = 2\delta_{\alpha\beta}\delta^{mn}(M + Z_n) \quad (5.217)$$

$$\{d_\alpha^m, d_\beta^{\dagger n}\} = 2\delta_{\alpha\beta}\delta^{mn}(M - Z_n) \quad (5.218)$$

alakba írható. Az (5.218) egyenlet baloldalán egy nemnegatív operátor áll ezért

$$M \geq Z_n. \quad (5.219)$$

Tegyük fel, hogy a Z_n valós pozitív számok közül r darabra teljesül, hogy $Z_1 = \dots = Z_r = M$. Ebben az esetben megmutatható [JW83], hogy az (5.216)-(5.218) algebra nemtriviális része egy $N - r$ dimenziós Clifford algebrával izomorf. Ekkor a megfelelő ábrázolási tér állapotvektorait BPS-állapotoknak, az (5.219) egyenlőtlenséget pedig BPS korlátnak nevezzük.

A bennünket érdeklő esetre $N = 2$, ekkor csak egyetlen centrális töltésünk van. BPS állapotokra tehát

$$M = |Z| \quad (5.220)$$

Normált állapotokra az S_q mennyiségeket Tsallis-Havrda-Charvát entrópiáknak nevezik [BŽ06]. Ismeretes, hogy a (2.9) von Neumann entrópia az S_q entrópiák $q \rightarrow 1$ limeszeként áll elő.

⁷⁴Népszerűsítő alakban: SUSY = $\sqrt{\text{TRANSLATIONS}}$.

⁷⁵Kizárólag ebben az alfejezetben a megszokottól eltérő címkézést használunk. Lásd például (5.117) ahol az m, n indexek jelentése más mint most. Hasonlóan most más az a, b indexek jelentése is. A következő fejezetekben természetesen már ismét a megszokott konvenciók vannak érvényben.

ahol a megjelenő mennyiség a komplex centrális töltés abszolútértéke. A BPS korlát teljesülése esetén a szuperszimmetria töltések fele triviálisan hat ezért a szuperszimmetrikus multiplettet a várt $2^{2N} = 2^4$ helyett $2^N = 2^2 = 4$ keltő operátor generálja. Ezt a jelenséget multiplett rövidülésnek nevezzük. A rövid multiplettek teljesülő (5.220) relációt se perturbatív se nemperturbatív korrekciók nem változtathatják meg⁷⁶.

Eddig csak a szuperszimmetria algebra ábrázolásainak speciális tulajdonságairól beszéltünk. Bennünket igazából azonban az érdekel, hogy ez a szimmetria hogyan jelenik meg az általunk tanulmányozott effektív négydimenziós IIB típusú szupergravitációban.

A szupergravitációs elméletekben a szuperszimmetria *lokális* szimetriaként jelenik meg. Ez azt jelenti, hogy a fermionikus terek transzformációit téridő-koordinátáktól függő $\varepsilon(x)$ spinorok paraméterezik. Ezen transzformációkra nézve bizonyos térkonfigurációk invariánsak. Azokat a spinorokat melyek nem változtatják meg ezeket a konfigurációkat Killing spinoroknak nevezzük⁷⁷.

Emlékeztetünk most arra, hogy az általunk használt (5.103) hatás az effektív IIB szupergravitációs hatásnak csak a bozonikus tereket tartalmazó része. Természetesen a teljes hatás szuperszimmetrikus ezért az a bozonikus szabadsági fokokon kívül tartalmaz még ugyanannyi fermionikus szabadsági fokot is. A teljes IIB effektív hatást változatlanul hagyó szuperszimmetria transzformációk fermionikus tereket bozonikusba illetve a bozonikusakat fermionikusba transzformálják. A transzformációk infinitezimális alakja sematikusán

$$\delta_{\varepsilon(x)} B(x) = F(x), \quad \delta_{\varepsilon(x)} F(x) = B(x) \quad (5.221)$$

Killing spinorok által generált konfigurációk esetén $\delta_{\varepsilon(x)} B(x) = 0$ és $\delta_{\varepsilon(x)} F(x) = 0$. A IIB szupergravitáció általunk vizsgált megoldásai tisztán bozonikus természetűek. Ez azt jelenti hogy a fermionikus tereket elhagyjuk $F(x) = 0$ s így ennek következtében $\delta_{\varepsilon(x)} B(x) = 0$ triviálisan teljesül. A $\delta_{\varepsilon(x)} F(x) = 0$ kényszer kikötése azonban a bozonikus terekre nézve extra megkötéseket jelent. A kényszer a bozonikus terekben elsőrendű. Megmutatható [BLS98, Sab98], hogy ezek a bozonikus terekben elsőrendű egyenletek pontosan a jólismert (5.141) elsőrendű szoliton egyenleteket szolgáltatják. Ezért a korábbiakban tanulmányozott szolitonok *szuperszimmetrikus szolitonok*. Megmutatható az is [Moh01], hogy ezekben az egyenletekben felbukkanó $|Z|$ mennyiség aszimptotikus értéke⁷⁸ pontosan az $N = 2$ szuperszimmetria algebra centrális töltése.

Vegyük észre, hogy a vizsgált szuperszimmetrikus fekete lyukak prototípusát szolgáló extrémális Reissner-Nordström megoldás mindkét aszimptotikus tartománya igen speciális. Az $r \rightarrow \infty$ geometria a Minkowski téridő, az $r \rightarrow 0$ közel horizont geometria pedig az (5.145) $AdS_2 \times S^2$ Bertotti-Robinson geometria. Memutatható [Moh01], hogy a vizsgált $N = 2$ szupergravitáció esetén kizárólag ezek a statikus gömbszimmetrikus geometriák rendelkeznek $N = 2$ szuperszimmetrikus térkonfigurációkkal. Célszerű ezt a két geometriát az elmélet két vákuum állapotának tekinteni. Ekkor a szuperszimmetrikus fekete-lyuk megoldásokat olyan állapotok szemiklasszikus reprezentánsainak tekinthetjük melyek két vákuum állapot között interpolálnak.

Figyeljünk fel arra is, hogy a szuperszimmetrikus szolitonokat leíró (5.141) elsőrendű egyenletek az összefonódottság képben az (5.152) alakot öltik. Mint tudjuk ez az egyenlet az attraktor mechanizmust GHZ-típusú állapotok "desztillációjával" hozza kapcsolatba. Valóban az (5.187) és az (5.188) egyenletekből láthatóan a horizonton ($r \rightarrow 0$) illetve az aszimptotikusan Minkowski ($r \rightarrow \infty$) tartományban is GHZ állapotok jelennek meg. Az előző bekezdés értelmében mindkét limeszt s így mindkét GHZ-állapotot egy-egy lehetséges szuperszimmetrikus vákuum állapot szemiklasszikus reprezentánsának tekinthetjük. A közbülső (interpoláló) tartományban

⁷⁶Feltéve, hogy a *teljes* elmélet szuperszimmetrikus.

⁷⁷ Az elnevezés a Killing vektor általánosításából ered. A Killing vektorok a metrika izometriáit generáló vektormezők. Hasonlóan a Killing spinorok a fentiekben nem specifikált terek "izometriáit" generálják.

⁷⁸Az alfejezet elején vizsgált Poincaré csoport szimmetriával kombinált szuperszimmetria algebrát csak az aszimptotikusan Minkowski tartományban kapjuk vissza.

azonban a GHZ-amplitúdókon kívül a fennmaradó amplitúdók általában nem zérusok. Ismeretes [Moh01], hogy az aszimptotikus tartományokban a Killing spinorok száma nyolc, az interpoláló tartományban pedig négy. Mivel ezeknek a spinoroknak a száma a szuperszimmetria rendjéről tudósít innen látjuk, hogy a szuperszimmetria rendje és a $|\Gamma\rangle$ összefonódott állapot Hodge diagonális bázisbeli szerkezete között szoros kapcsolat áll fenn.

Az összefonódott állapotvektoraink és a szuperszimmetria közötti kapcsolat még nyilvánvalóbb ha az (5.53)-(5.58) egyenletekhez visszalapozva felfedezzük, hogy a $|\Gamma\rangle$ állapot Hodge diagonális bázisbeli amplitúdóinak mindegyike a $Z(\Gamma)$ "centrális töltéssel" fejezhető ki⁷⁹. Megjegyezzük még azt is, hogy a centrális töltés (5.54) felírásában szereplő W mennyiség neve: szuperpotenciál [JHS07]. Mint tudjuk a (4.53) illetve a (4.61)-(4.63) összefüggések értelmében ez a mennyiség egyben a speciális összefonódott rendszerek és a Freudenthal rendszerek közötti kapcsolat kulcsfigurája is.

5.7. Nem-BPS fekete lyukak

Az előző fejezetben kiderült, hogy az STU modellel kapcsolatos szuperszimmetrikus (BPS) fekete lyuk megoldások attraktor mechanizmusa az összefonódott állapotok nyelvén elegáns módon tárgyalható. Felmerül a kérdés: milyen képet ad az összefonódottság elmélet a nem szuperszimmetrikus, nem BPS-típusú fekete lyukakról?

Láttuk, hogy a BPS megoldások esetén az (5.137) hatás az (5.140) módon teljes négyzetté alakítható, ezért a másodrendű Euler-Lagrange egyenletek helyett elég csak az (5.141) elsőrendű egyenleteket vizsgálni. Arra is utaltunk, hogy ezeket az elsőrendű egyenleteket a teljes szuperszimmetrikus effektív hatás (5.221) alakú variációinak eltűnéséből is visszakapjuk.

A nem-BPS attraktorok vizsgálatához azonban vissza kell nyúlnunk az (5.137) hatásból származtatható másodrendű Euler-Lagrange egyenletekhez. Ezen egyenletek alakja

$$\ddot{U} = G_N e^{2U} V_{BH}, \quad \ddot{z}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{z}^b \dot{z}^c = G_N e^{2U} \partial^a V_{BH} \quad (5.222)$$

ahol a pont most ismét a $\varrho = 1/r$ koordináta szerinti deriválást jelenti, és az STU modellre a Christoffel szimbólumok nem eltűnő komponensei $\Gamma_{aa}^a = -i/y^a$ alakúak. Természetesen továbbra is érvényben van az (5.136) kényszer, ahol az általunk vizsgált extrémális fekete lyukakra: $c = 0$.

A fekete lyuk potenciál extremizálásának eredményeképp kapjuk [FGK97, SV08]

$$\partial_a V_{BH} = e^K (G^{b\bar{c}} (D_a D_b W) \bar{D}_{\bar{c}} \bar{W} + 2(D_a W) \bar{W}) = 0 \quad (5.223)$$

$$\partial_{\bar{a}} V_{BH} = e^K (G^{\bar{b}c} (D_{\bar{a}} D_{\bar{b}} \bar{W}) D_c W + 2(\bar{D}_{\bar{a}} \bar{W}) W) = 0 \quad (5.224)$$

ahol $D_a W = \partial_a W + (\partial_a K)W$. Az STU modellre a képletekben az (5.108) összefüggéseket kell használni. Tegyük fel most, hogy $W \neq 0$ és⁸⁰ fejezzük ki $\bar{D}_{\bar{a}} \bar{W}$ -t (5.224)-ből és helyettesítsünk vissza (5.223)-be. Ekkor az STU modellre (5.53)-(5.58) illetve (5.138)-(5.139) felhasználásával azt kapjuk, hogy fennáll [6]

$$(2\Gamma_7 \Gamma_0 - \Gamma_5 \Gamma_2 - \Gamma_4 \Gamma_3) \Gamma_6 = 0 \quad (5.225)$$

$$(2\Gamma_7 \Gamma_0 - \Gamma_4 \Gamma_3 - \Gamma_6 \Gamma_1) \Gamma_5 = 0 \quad (5.226)$$

$$(2\Gamma_7 \Gamma_0 - \Gamma_6 \Gamma_1 - \Gamma_5 \Gamma_2) \Gamma_3 = 0 \quad (5.227)$$

⁷⁹Ismételten hangsúlyozzuk, hogy igazából csak a Z_∞ mennyiséget szabadna centrális töltésnek nevezni. A Hodge diagonális bázisban ugyanis $Z(\Gamma) = Z(r)$ egy függvény. Az irodalomban (pontatlanul) ezt a függvényt is centrális töltésnek szokták nevezni. Az $M_{BPS} = M_{ADM} = |Z_\infty|$ BPS korlát az aszimptotikusan Minkowski tartományban érvényes. Itt M_{ADM} az Arnótt-Deser-Misner tömeg mely a metrika g_{tt} komponenséből a szokott úton származtatható [Moh01, JHS07, Wal84].

⁸⁰Mivel $Z = e^{K/2} W$ ezért ez a megkötés azt jelenti hogy a "centrális töltés" nem zérus.

és a fenti egyenletrendszer konjugáltja, ahol a bináris címkézés helyett most az áttekinthetőbb decimális címkézést használtuk. Emlékeztetünk arra, hogy (5.57)-(5.58) miatt $\Gamma_{7-s} = -\bar{\Gamma}_s$ ahol $s = 0, 1, \dots, 7$.

Amennyiben V_{BH} második deriváltjaiból képzett Hessian-mátrix a kritikus pontban pozitív definit az (5.225)-(5.227) extrémum feltételek a potenciált egyúttal minimalizálják is. Az ilyen tulajdonságú kritikus pontokat attraktor pontoknak nevezzük. Az (5.227) egyenletekből láthatóan a $Z \neq 0$ ($W \neq 0$) feltétel mellett a fekete lyuk potenciál extremalizálására két lehetőségünk van.

Az első⁸¹

$$\Gamma_1 = \Gamma_6 = \Gamma_2 = \Gamma_5 = \Gamma_4 = \Gamma_3 = 0, \quad \Gamma_7 = -\bar{\Gamma}_0 \neq 0. \quad (5.228)$$

Ez az eset az előző fejezetben tárgyalt és az (5.175)-(5.176) egyenletekkel fémjelzett BPS attraktoroknak felel meg. Tekintettel arra, hogy az aszimptotikusan Minkowski régió nyolc szuperszimmetriájából ez a megoldás csak négyet őriz meg a megoldást gyakran $\frac{1}{2}$ -BPS megoldásnak is nevezik.

A másik lehetőséget a

$$|\Gamma_1|^2 = |\Gamma_6|^2 = |\Gamma_2|^2 = |\Gamma_5|^2 = |\Gamma_4|^2 = |\Gamma_3|^2 = |\Gamma_7|^2 = |\Gamma_0|^2 \quad (5.229)$$

kényszerek adják. Ezek felelnek meg a nem-BPS attraktoroknak [HK07, KSS06, GLS08a]. Ezek a megoldások jóllehet a horizonton nem eltűnő centrális töltéssel rendelkeznek azonban ott egyetlen szuperszimmetriát sem őriznek meg.

A harmadik lehetőséget azok az attraktorok adják melyre a centrális töltés a horizonton eltűnik [BMOS07]. Ezekre az alábbi három lehetőség van

$$\Gamma_7 = \Gamma_0 = \Gamma_2 = \Gamma_5 = \Gamma_4 = \Gamma_3 = 0, \quad \Gamma_1 = -\bar{\Gamma}_6 \neq 0 \quad (5.230)$$

$$\Gamma_7 = \Gamma_0 = \Gamma_4 = \Gamma_3 = \Gamma_1 = \Gamma_6 = 0, \quad \Gamma_2 = -\bar{\Gamma}_5 \neq 0 \quad (5.231)$$

$$\Gamma_7 = \Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma_6 = \Gamma_2 = \Gamma_5 = 0, \quad \Gamma_4 = -\bar{\Gamma}_3 \neq 0. \quad (5.232)$$

A szuperszimmetria a horizonton ezekre a megoldásokra is sérül⁸².

5.7.1. Attraktorok eltűnő centrális töltéssel . A nem-BPS attraktorok vizsgálatát az eltűnő centrális töltéssel rendelkező attraktorok vizsgálatával kezdjük. Ezekre az attraktorokra a horizonton teljesülnek az (5.230)-(5.232) egyenletek. A BPS esetre már megismert analízissel belátható, hogy ezekben az esetekben a horizonton az (5.188) egyenlet állapotához nagyon hasonló GHZ-állapotok desztillálódnak ki

$$|\Gamma\rangle = -|D_1 Z_*| [e^{-i\alpha_1} |001\rangle - e^{i\alpha_1} |110\rangle]_{r=0} \quad (5.233)$$

$$|\Gamma\rangle = -|D_2 Z_*| [e^{-i\alpha_2} |010\rangle - e^{i\alpha_2} |101\rangle]_{r=0} \quad (5.234)$$

$$|\Gamma\rangle = -|D_3 Z_*| [e^{-i\alpha_3} |100\rangle - e^{i\alpha_3} |011\rangle]_{r=0} \quad (5.235)$$

ahol $\alpha_j = \arg D_j Z$. A fenti attraktorok nyilván nem szuperszimmetrikusak hiszen mivel $G^{a\bar{b}}$ pozitív definit

$$M_* = (V_{BH})_* = (G^{a\bar{b}} D_a Z \bar{D}_{\bar{b}} \bar{Z})_* > |Z|_* \quad (5.236)$$

⁸¹Az alább felsorolt egyenleteknek a horizonton kell teljesülnie. Ezért a (5.175)-(5.176) egyenletekhez hasonlóan egy * alsó index alkalmazásával kellene arra utalni, hogy a megfelelő mennyiségek horizonton felvett értékeit vesszük. Ettől most eltekintünk.

⁸²Megjegyezzük, hogy a horizonton jelenlévő maximális $N = 2$ szuperszimmetria algebra neve: $\mathfrak{psu}(1, 1|2)$. Ez az algebra az aszimptotikusan Minkowski tartománnyal ellentétben nem a Poincaré algebrát tartalmazza, hanem az $\mathfrak{su}(1, 1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ bozonikus részalgebrát. Ez az (5.145) Bertotti-Robinson közelhorizont geometria izometriacsoportjának algebrája. Ekkor a horizonton eltűnő centrális töltés kifejezés jelentése az, hogy ebben az esetben a $\mathfrak{psu}(1, 1|2)$ algebrának nincsen centrális kiterjesztése.

értelmében nem teljesül a BPS korlát⁸³. Könnyen belátható [BMOS07], hogy a fenti nem-BPS attraktorok az $\frac{1}{2}$ -BPS attraktorokból azáltal kaphatók, hogy a három τ^a modulus közül tetszőleges kettőnek a képzetes részének az előjelét⁸⁴ megváltoztatjuk, és ezzel egyidőben a p^I, q_I töltésekre speciális kényszereket kötünk ki. Például az $y^1 \rightarrow y^1, y^2 \rightarrow -y^2, y^3 \rightarrow -y^3$ előjel flippek a következő kényszerekre vezetnek

$$D(\gamma) > 0, \quad p^2 p^3 - p^0 q_1 < 0, \quad p^1 p^3 - p^0 q_2 > 0, \quad p^1 p^2 - p^0 q_3 > 0 \quad (5.237)$$

illetve

$$D(\gamma) > 0, \quad p^2 p^3 - p^0 q_1 > 0, \quad p^1 p^3 - p^0 q_2 < 0, \quad p^1 p^2 - p^0 q_3 < 0 \quad (5.238)$$

illetve a trialitási (permutációs) szimmetria miatt még két további eset lehetséges melyeket ciklikus permutációval kapunk. A modulusok nem-BPS radiális evolúciója az (5.185) BPS evolúcióból kapható azáltal, hogy tetszőleges két modulus képzetes részének előjelét megváltoztatjuk, és a $h^I(r), h_I(r)$ harmónikus függvényekre az (5.238) nem-BPS töltéskényszerekkel analóg kényszereket kötünk ki [BFMY08]. A gyűrési faktorra kapható formula a nem-BPS töltéskényszerek mellett továbbra is a (5.167) kifejezéssel adott.

Idézzük most fel az (5.203) 2×2 -es *szimmetrikus* mátrixok kifejezését ahol (5.199) a $D(\gamma)$ Cayley hiperdetermináns alternatív alakja! Ezekben a mátrixokban a töltések *kvadratikus* kifejezései jelennek meg. Az 5.6.4 fejezetben a szimmetrikus 2×2 -es mátrixok terét az (5.204) bilineáris formával láttuk el, és így a töltéskonfigurációinkat három darab $2 \oplus 1$ dimenziós Minkowski tér-időbeli vektorral jellemeztük. A három Minkowski vektor nem független, őket a három-qubitra jellemző trialitási szimmetria köti össze. A trialitási szimmetria miatt mindhárom Minkowski vektor hossza ugyanakkora. Azonban a BPS töltéskonfigurációkkal szemben (melyekre $D(\gamma)$ *negatív*) a most tárgyalt nem-BPS töltéskonfigurációkra $D(\gamma)$ *pozitív*. Az (5.203) mátrixokhoz asszociált Minkowski hármasektorok tehát olyan egységvektorok melyek a BPS esetben *időszerűek* a nem-BPS esetben pedig *térszerűek*. A 2.5.5 fejezet eredményei alapján azt is tudjuk, hogy az időszerű (BPS) illetve térszerű (nem BPS) töltéskonfigurációk a két inekvivalens valós SLOCC osztályba esnek. A (5.237) és (5.238) kényszerek és a belőlük ciklikus permutációval kapható két másik kényszer a BPS esetben megismert (5.205)-(5.206) feltételekből következő $(\gamma_0 \cdot \gamma_0)^a > 0$ feltételekből megfelelő előjelváltásokkal kapható.

Érdekes megfigyelni azt is, hogy a töltéskombinációk ezen felosztása egy a $3 \oplus 1$ dimenziós Minkowski téridővel izomorf tér bevezetésével is megtehető. Valóban a (2.130) formulával kapcsolatos fejtegetéseinkből azt is tudjuk, hogy a három rebit állapottal parametrizált töltéseket a P_{IJ} Plücker koordinátákkal és azok $*P_{IJ}$ duáltjával is jellemezhetjük. Ezek ezúttal 4×4 -es *antiszimmetrikus* mátrixok melyek a töltésekben ismét *kvadratikus* kifejezések. A 2.5 fejezetben láttuk, hogy ebben a képből a SLOCC osztályok a Klein felületen elhelyezkedő $(P, *P)$ pontpár geometriai tulajdonságaival kapcsolatosak. Láttuk, hogy a Klein felület alkalmasan választott valós metszete a kompaktifikált Minkowski téridővel homeomorf és a $(P, *P)$ pontpárra $2D(\gamma)$ a pontpár Minkowski távolságának alakjára hozható. Ebben a képből a BPS töltéskonfigurációk ismét *időszerű* a nem-BPS konfigurációk pedig *térszerű* vektoroknak felelnek meg csak hogy most egy $3 \oplus 1$ dimenziós Minkowski térben. A töltéskonfigurációk ezen duális jellemzése a Cayley hiperdetermináns speciális szimmetriatulajdonságaira vezethető vissza⁸⁵.

⁸³Itt az M tömeg természetesen az általános relativitáselméletből jólismert standard Arnowitt-Deser-Misner (ADM) tömeg [Wal84].

⁸⁴A modulusterek képzetes részét dilaton térnek is szokták nevezni.

⁸⁵Lásd a 2.5 fejezetet.

Visszatérve a $Z = 0$ attraktorokra könnyen belátható, hogy az (5.188) és az (5.233)-(5.235) állapotok mindegyikére igaz, hogy

$$\frac{1}{2} \|\Gamma\|_*^2 = (V_{BH})_* = |D(\gamma)| \quad (5.239)$$

Mindegyik állapot normájának a fele tehát a fekete lyuk (5.171) Bekenstein-Hawking entrópiájával kapcsolatos. A nem-BPS állapotokat is figyelembe vevő kifejezés végső alakja tehát

$$S_{BH} = \pi \sqrt{|D(\gamma)|} \quad (5.240)$$

ahol $D(\gamma)$ a nem-BPS esetben pozitív a BPS esetben negatív.

Hasonlítsuk most össze az (5.188) BPS állapotvektort az (5.233)-(5.235) nem-BPS állapotvektorokkal! Tudjuk már, hogy mindegyik állapotok normája ugyanazt a polinom invariánst adja, a BPS/nem-BPS jelleg az invariáns előjelébe van kódolva. További fontos különbség, hogy a nem-BPS bázisvektorok a BPS bázisvektoroktól egyetlen bit flipben különböznek. Valóban a nem-BPS vektorokat a BPS vektorból az $I \otimes I \otimes \sigma_1$ operátorral illetve ennek ciklikus permutáltjainak hatásával kaphatjuk. Ez nem meglepő, hiszen az 5.6.4 fejezet végén elmondottak értelmében a BPS attraktor egyenletek a bit flip hibák lehetőségének kizárását jelentik. Az eltűnő centrális töltéssel rendelkező nem-BPS attraktorokra a kovariáns deriváltakkal kapcsolatos amplitúdók nem tűnnek el. A kovariáns deriváltak pedig mint (5.18)-(5.19)-ből tudjuk bit flip hibákat generálnak⁸⁶.

Érdekes felidézni azt is hogy amíg a BPS attraktorok kulcsfontosságú mennyisége a $Z = e^{K/2} W(\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ "szuperpotenciál" addig a nem-BPS attraktorok megfelelő mennyiségei a szuperpotenciálból kovariáns deriválással kapható

$$Z_1 = e^{K/2} W(\tau^1, \bar{\tau}^2, \bar{\tau}^3), \quad Z_2 = e^{K/2} W(\bar{\tau}^1, \tau^2, \bar{\tau}^3), \quad Z_3 = e^{K/2} W(\bar{\tau}^1, \bar{\tau}^2, \tau^3) \quad (5.241)$$

kifejezések. Ezek a mennyiségek az (5.230)-(5.232)-ben szereplő amplitúdókkal az (5.57)-(5.58) módon állnak kapcsolatban. Könnyű belátni, hogy emiatt a $Z = 0$ -val jellemzett nem BPS attraktor egyenletek teljes megoldását adó (5.222) másodrendű Euler-Lagrange egyenletek az egyszerűbb (5.141) BPS egyenletekhez hasonlatos elsőrendű egyenletekre vezetnek. Ezeket az egyenleteket úgy kapjuk, hogy az (5.141)-ben szereplő Z szuperpotenciál abszolútértékét a $Z_a, a = 1, 2, 3$ "hamis szuperpotenciálok" [CD07a, ADOT07, CCD⁺07] abszolútértékeivel helyettesítjük. A hamis szuperpotenciál fogalma onnan ered, hogy jöllehet a kapott megoldás nem szuperszimmetrikus azonban a szuperszimmetriára jellemző elsőrendű formalizmus mégis alkalmazható.

Az STU modell BPS megoldásai esetén a holomorf struktúra összekapcsolódik a szuperszimmetriával. Ez például onnan látható, hogy a GHZ-állapotok horizonton történő desztillációja a tórusz kohomológiájának $H^{3,0}$ -részéért felelős (5.33) holomorf háromforma speciális szerepével kapcsolatos. Ebben az alfejezetben azonban a vizsgált nem-BPS attraktorokra a kohomológia $H^{3,0}$ -része már nem játszik kitüntetett szerepet. Ez a holomorf struktúra elvesztésével jár. Ez abban jelentkezik, hogy a megfelelő GHZ állapotok már a kohomológia $H^{2,1}$ részével kapcsolatosak. Ez azt jelenti, hogy a "desztillációs" folyamat eredményeképp előálló (5.233) állapotban már az (5.37) képletben szereplő holomorf és antiholomorf koordinátákat is tartalmazó háromformák szerepelnek.

5.7.2. A nem-BPS $Z \neq 0$ alapmegoldás [16]. Ebben a fejezetben a horizonton az (5.229) feltételeket kielégítő nem-BPS, $Z \neq 0$ attraktorok összefonódottságelméleti vizsgálatát végezzük el. Első lépésként annak a nem-BPS "alapmegoldásnak" [GLS08a] a szerkezetét tanulmányozzuk melyből dualitási transzformációk segítségével a legáltalánosabb nem-BPS megoldás is megkapható [BFMY08].

⁸⁶Lásd még a (5.24)-(5.25) összefüggéseket.

Az alapmegoldásra a nyolc töltésből csak négy különbözik zérustól: $q_0 < 0$ and $p^i > 0, i = 1, 2, 3$. A töltések előjelét úgy választottuk, hogy az (5.172) formulának megfelelően $D(\gamma) = D = -4q_0p^1p^2p^3 > 0$ legyen.

Definiáljuk most az alábbi segédmenyiségeket

$$\hat{h}_a(\varrho) = d_a + D^{1/4}\varrho, \quad \hat{h}_0(\varrho) = -d_0 - D^{1/4}\varrho \quad (5.242)$$

$$d_a = \frac{D^{1/4}}{\sqrt{2}p^a}, \quad d_0 = -\frac{D^{1/4}}{\sqrt{2}q_0}(1 + B^2) \quad (5.243)$$

és

$$R_a = \sqrt{\frac{-2q_0p^a}{|\epsilon_{abc}|p^b p^c}}, \quad B \equiv x^1(0) = x^2(0) = x^3(0) \quad (5.244)$$

Amint látjuk a B valós paraméter a modulusterek valós részének aszimptotikus értékét rögzíti. A $\hat{h}_I(\varrho)$ harmónikus függvények ($\varrho = 1/r$), a radiális evolúció BPS esetének már ismert szereplői. Ezekkel a mennyiségekkel az (5.222) egyenletek 5 paraméteres nem-BPS alapmegoldását [GLS08a] a

$$\tau^a = R_a \frac{B - ie^{-2U}}{\frac{1}{2}|\epsilon_{abc}|\hat{h}_b\hat{h}_c}, \quad e^{-4U} = -\hat{h}_0\hat{h}_1\hat{h}_2\hat{h}_3 - B^2 \quad (5.245)$$

alakba írhatjuk. Figyeljük meg, hogy a BPS eset (5.167) és (5.168) formuláihoz hasonlóan $e^{-4U(0)} = 1$ és triviálisan teljesül az (5.169) összefüggés is. Az aszimptotikus modulusok alakja: $\tau^a(0) = B - i$.

Határozzuk meg az alapmegoldásra az (5.195) Hadamard (diszkrét Fourier) transzformált $|\hat{\Gamma}\rangle$ állapotot az aszimptotikusan Minkowski régióban illetve a horizonton aktuális bázisokban. Az eredmény

$$\begin{aligned} |\hat{\Gamma}\rangle = & p^1|001\rangle_o + p^2|010\rangle_o + p^3|100\rangle_o - iB(p^2 + p^3)|110\rangle_o \\ & - iB(p^1 + p^3)|101\rangle_o - iB(p^1 + p^2)|011\rangle_o \\ & + [q_0 - B^2(p^1 + p^2 + p^3)]|111\rangle_o. \end{aligned} \quad (5.246)$$

$$|\hat{\Gamma}\rangle = (-q_0p^1p^2p^3)^{1/4}(|001\rangle_* + |010\rangle_* + |100\rangle_* - |111\rangle_*) \quad (5.247)$$

ahol a $|\psi\rangle_{o,(*)}$ szimbólum a megfelelő vektor $\varrho = 0(\infty)$ helyen felvett értékét jelenti. Látható, hogy az aszimptotikus tartományban az amplitúdók szerkezete jóval bonyolultabb (7 általában különböző nemzérus amplitúdó) és a kifejtés explicit moduli függést mutat (B). A horizonton azonban csak négy zérustól különböző egyenlő abszolútértékű amplitúdónk van. Ezek az amplitúdók pedig, az attraktor mechanizmus jelenségével összhangban, függetlenek a B aszimptotikus modulustól. Megjegyezzük, hogy inverz Hadamard transzformáció után

$$|\Gamma\rangle = D^{1/4}\frac{1}{2}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle - |011\rangle + |100\rangle - |101\rangle - |110\rangle - |111\rangle)_* \quad (5.248)$$

tehát az amplitúdók a horizonton valóban kielégítik az (5.229) feltételeket.

5.7.3. Általános nem-BPS $Z \neq 0$ attraktorok [16]. A legáltalánosabb nem-BPS $Z \neq 0$ attraktorokat $SL(2, \mathbb{R})^{\times 3}$ dualitási transzformációk segítségével az alapmegoldásból kaphatjuk. Ez azt jelenti, hogy egy már ismert töltés ($|\gamma\rangle$) és moduli (τ^a) konfigurációból, új töltéssel ($|\gamma'\rangle$) és új modulusokkal ($\tau^{a'}$) kapcsolatos megoldásokat kaphatunk ahol

$$|\gamma'\rangle = M_3 \otimes M_2 \otimes M_1 |\gamma\rangle, \quad \tau^{a'} = \frac{\alpha^a \tau^a + \beta^a}{\gamma^a \tau^a + \delta^a} \quad (5.249)$$

és a részleteket illetően lásd az (5.29) transzformációs szabályt.

Első lépésként célszerű az alapmegoldást egy még egyszerűbb $Z \neq 0$ típusú megoldásba transzformálni. A legegyszerűbb indulási pont egy olyan két nemzérus töltésből álló nem-BPS

töltéskonfiguráció kiválasztása melyre $D(\gamma) > 0$. Az (5.172) képletből látható, hogy amennyiben csak a (p^0, q_0) páros nemzérus, a $|\gamma\rangle$ töltésállapot már eleve a $p^0|000\rangle - q_0|111\rangle$ GHZ alakban áll elő és $D(\gamma) = (p^0 q_0)^2 > 0$. A p^0, q_0 pár előjele lényegtelen ezért mindkettőt pozitívnak választjuk. Az alapmegoldás ismeretében ez a két töltéses megoldás megkonstruálható. A legáltalánosabb nem-BPS megoldás ebből a két töltéses megoldásból további dualitási transzformációval kapható [GLS08a, BFMY08, 16]

$$x^a(\varrho) = \frac{p^I q_I - 2p^a q_a}{2(p^b p^c - p^0 q_a)} + \frac{\sqrt{D(\gamma)}}{2(p^b p^c - p^0 q_a)} C_x^a(\varrho), \quad (5.250)$$

$$y^a(\varrho) = \frac{\sqrt{D(\gamma)}}{2(p^b p^c - p^0 q_a)} C_y^a(\varrho) \quad (5.251)$$

$$e^{-4U(\varrho)} = h_0(\varrho) h_1(\varrho) h_2(\varrho) h_3(\varrho) - b^2 \quad (5.252)$$

ahol $b = B/G_N$ (lásd (5.244)) és az ismétlődő "a" indexre nincs összegzés. Itt a ϱ -függő tagok alakja

$$C_x^a(\varrho) = \frac{\nu_a^2 C_1^a - C_3^a}{\nu_a^2 C_1^a + 2\nu_a C_2^a + C_3^a}, \quad (5.253)$$

$$C_y^a(\varrho) = \frac{4\nu_a C_4}{\nu_a^2 C_1^a + 2\nu_a C_2^a + C_3^a} \quad (5.254)$$

ahol

$$C_1^a = h_b h_c + h_0 h_a + 2b, \quad (5.255)$$

$$C_2^a = h_b h_c - h_0 h_a, \quad (5.256)$$

$$C_3^a = h_b h_c + h_0 h_a - 2b, \quad (5.257)$$

$$C_4 = \exp(-2U) \quad (5.258)$$

$$h_I(\varrho) = b_I + (D(\gamma))^{\frac{1}{4}} \varrho \quad (5.259)$$

a megszokott harmónikus függvényekkel kapcsolatos kifejezések és

$$\nu_a = \nu e^{\alpha_a}, \quad \nu = \left(\frac{\hat{p}^0 + p^0}{\hat{p}^0 - p^0} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (5.260)$$

ahol a \hat{p}^0 Freudenthal duált definícióját illetően lásd az (5.184) egyenletet. A képletekben az abc indexek együttes szerepeltetése azt jelenti, hogy ezek az 1, 2, 3 számok ciklikus sorrendben vett három kombinációján futnak végig ⁸⁷.

Tisztáznunk kell az (5.250)-(5.252) megoldásban szereplő α_a paraméterek fizikai jelentését. Ezt a megoldást a $|\gamma\rangle = p^0|000\rangle - q_0|111\rangle$ töltésállapottal kapcsolatos nem-BPS megoldásból kaphatjuk. Ha megvizsgáljuk, hogy melyek azok az $SL(2, \mathbb{R})^{\times 3}$ dualitási transzformációk melyek $|\gamma\rangle$ -t változatlanul hagyják ⁸⁸ akkor azt kapjuk, hogy ezek a dualitási csoport azon részcsoportját adják melyet a

$$M_a = \begin{pmatrix} e^{\alpha_a} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_a} \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (5.261)$$

⁸⁷Az előző alfejezetben tárgyalt alapmegoldásnál az aszimptotikus modulusokat úgy normáltuk, hogy a tóruszok térfogata egységnyi legyen: $\tau(0) = B - i$. Most azonban megengedjük azt a lehetőséget is, hogy a tóruszok aszimptotikus térfogata tetszőleges legyen. Ezt azért lehetjük el, hogy a töltéseket megfelelő módon átskálázzuk. Ezeknek a "felöltöztetett" töltéseknek a kapcsolatát az általunk használtakkal lásd Gimon és társai cikkében [GLS08a]. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a kétfajta töltés és az aszimptotikusan kétfajta módon normált modulusok között nem vezetünk be megkülönböztető jelölést. Az alábbi eredmények jelöléstechnikailag precízebb megfogalmazását illetően a Szerző és Szalay Szilárd közös dolgozatára utalunk [16].

⁸⁸Azaz melyek azok a transzformációk melyekre $|\gamma\rangle = M_3 \otimes M_2 \otimes M_1 |\gamma\rangle$.

mátrixok jellemeznek. Ezek a mátrixok a modulusokat (5.249) alapján a $\tau^a \mapsto e^{2\alpha_a} \tau^a$ módon transzformálják. Az extra $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ feltétel miatt a $\tau^1 \tau^2 \tau^3$ szorzat invariáns és ezen belül az $y^1 y^2 y^3$ képzetes részek szorzata is az. Az y^a képzetes részek azonban az (5.1) képletet követő bekezdés értelmében az egyes T^2 tóruszok térfogatát adják. Ez azt jelenti, hogy az (5.261) transzformációk az egyes tóruszok olyan térfogati deformációit jellemzik melyek az eredő $T^2 \times T^2 \times T^2$ hatdimenziós tórusz térfogatát változtatlanul hagyják.

Nyilván az (5.250)-(5.252) megoldással kapcsolatos tetszőleges nem-BPS $Z \neq 0$ töltéskonfiguráció stabilizátorának megadásához az (5.261) részcsoporthoz konjugálnunk kell azzal a dualitási transzformációval mely a $|\gamma\rangle = p^0|000\rangle - q_0|111\rangle$ konfigurációt a megfelelő töltéskonfigurációba viszi. Az előző fejezetben felírt alpmegoldás esetén például az eredményül kapott stabilizátor ugyan őrzi a nem-BPS töltéseket, de a neki megfelelő transzformáció az ottani B aszimptotikus moduluson túl α_a típusú új modulusokat generál. Megmutatható, hogy ezek az új modulusok módosítják az attraktorok viselkedését. A modulusok horizonton felvett értékei már *nem csak a töltésektől* hanem az α_a paramétereiktől is fognak függeni. Az adott kezdőfeltételekkel indított modulusok egy dinamikai rendszer "folyamát" definiálják. Az α_a paraméterek speciális irányokban elindított folyamokat jellemeznek. Ezekre a speciális, az irodalomban lapos irányoknak [BFGM06, FM07] nevezett⁸⁹ irányokban elindított folyamatokra a modulusok attraktor pontbeli értékeit a töltések nem határozzák meg egyértelműen.

A lapos irányok összefonódottságelméleti jelentésének tisztázásához számoljuk ki a $|\hat{\Gamma}\rangle$ állapotot a horizonton! Az (5.250)-(5.252) megoldást használva kapjuk, hogy [16]

$$|\hat{\Gamma}\rangle = D^{1/4}(E_3 \otimes E_2 \otimes E_1)(H \otimes H \otimes H) \left(\sqrt{\frac{\hat{p}^0 + p^0}{\hat{p}^0 - p^0}} |000\rangle_* - \sqrt{\frac{\hat{p}^0 - p^0}{\hat{p}^0 + p^0}} |111\rangle_* \right) \quad (5.262)$$

ahol $D \equiv D(\gamma)$ az (5.172) Cayley hiperdetermináns, \hat{p}^0 az (5.184) Freudenthal duált töltés, H a (2.135) Hadamard transzformáció mátrixa és

$$E_a = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\alpha_a + \varphi)}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ \sinh(\alpha_a + \varphi) & -\cosh(\alpha_a + \varphi) \end{pmatrix} \quad (5.263)$$

$$\varphi = \log |\nu| \quad (5.264)$$

és fennállnak az (5.260) összefüggések.

Az (5.262) formulából láthatóan a $p^0 = 0$ speciális esetben $\varphi = 0$. Ekkor az E_a operátorok csak a lapos irányokkal kapcsolatos α_a paramétereiktől függenek és a horizonton előálló attraktor állapot töltésfüggése kizárólag a $D^{1/4}$ faktorra korlátozódik. Ekkor a $|\hat{\Gamma}\rangle$ állapot a $D^{1/4}(|000\rangle_* - |111\rangle_*)$ GHZ töltés állapot Hadamard transzformáltjából az $E_a \in GL(2, \mathbb{C})$ SLOCC operátorok alkalmazásával kapható. A GHZ állapotok fontos szerepét a BPS attraktor mechanizmus kapcsán már tisztáztuk. Ebben a nem-BPS esetben most azt is láthatjuk, hogy a lapos irányok a GHZ állapotokon ható olyan E_a "hiba operátorokkal" reprezentálhatók melyek paraméterei az $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ kényszer miatt nem függetlenek egymástól.

Mint tudjuk a SLOCC transzformációk, a fizikai rendszeren végrehajtott "klasszikus kommunikációval" kombinált lokális "kvantummanipulációk" matematikai reprezentánsai. Ez azt jelenti, hogy az egyes szeparált részrendszerekkel dolgozó kísérletezők egy *előzetes* megállapodásnak megfelelően szokásos klasszikus csatornák (postagalamb, telefon stb.) útján koordinálják lokális manipulációikat.

Formálisan az attraktor mechanizmus során előálló $|\hat{\Gamma}\rangle$ állapot szerkezete a fenti protokollra emlékeztet. A három összefonódott részrendszert most a horizonton speciálisan deformált kétdimenziós tóruszok összefont GHZ állapota reprezentálja. Ezen az állapoton az E_a hiba operátorok

⁸⁹A "lapos irány" elnevezés azzal kapcsolatos hogy ezekre az irányokra a V_{BH} fekete lyuk potenciál második deriváltjaiból felépített Hessian mátrixa a kritikus pontban zérus sajátértékekkel rendelkezik.

ugyan lokálisan hatnak, azonban az *előzetesen* (aszimptotikusan) rögzített $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ extra kényszer miatt ezek mégsem függetlenek. Ez a kényszer mint tudjuk a kétdimenziós tóruszoknak csak olyan térfogati fluktuációit engedi meg mely a teljes hatdimenziós tórusz térfogatát változtatlanul hagyja. Tehát az aszimptotikus Minkowski tartományban "indított" attraktor folyamatos irányokkal kapcsolatos $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ kényszere az E_a hiba operátorok révén mintegy "beíródik" a horizontra "érkező" attraktor állapotba⁹⁰.

A fejezet hátralévő részében szeretnénk megindokolni a "hiba operátor" kifejezés jogosságát. Az elnevezés azzal a felismeréssel kapcsolatos, hogy a nem-BPS megoldások horizonton előálló állapotait az alapmegoldás variációiként állíthatjuk elő. Ezeket a variációkat célszerű egy a hibajavító kódok elméletével kapcsolatos formalizmus keretében vizsgálni [6]. Az eredményeknek az illusztrálásához célszerű csupán négy töltéssel dolgozni.

Tekintsük először az alapmegoldásnál már tárgyalt $q_0 < 0$ and $p^a > 0$ nem-BPS töltéskonfigurációt! Ekkor $D = -4q_0p^1p^2p^3 > 0$, $\nu = 1$. A $|\hat{\Gamma}\rangle$ állapotra a speciális $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ esetben a már ismert (5.247) állapotot kapjuk. Ennek a négy töltéses esetnek a duálisára $p^0 > 0$, $q_a > 0$, $D = 4p^0q_1q_2q_3 > 0$, $\nu = -1$. Az állapot normájának fele mindkét esetben az entrópiát adja. A $D^{1/4}$ prefaktortól eltekintve az állapot fennmaradó része az előző esetből a $\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1$ bit flip operátorokkal és a képzetes egységgel történő szorzással kapható. Az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ esetben

$$|\hat{\Gamma}\rangle = i(p^0q_1q_2q_3)^{\frac{1}{4}} \left[|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle - |000\rangle \right]. \quad (5.265)$$

Változtassuk most meg a p^1, p^2, p^3 töltések előjelét olymódon hogy a fekete lyuk entrópiával kapcsolatos D kifejezés előjele ne változzon meg. Ez azt jelenti, hogy továbbra is a nem-BPS megoldások tartományában maradunk. Megmutatható [6], hogy ekkor

$$|\hat{\Gamma}\rangle_{m_3m_2m_1} = i(p^0q_1q_2q_3)^{\frac{1}{4}} \left[m_1|110\rangle + m_2|101\rangle + m_3|011\rangle - |000\rangle \right]. \quad (5.266)$$

ahol

$$(m_3, m_2, m_1) \in \{(+++), (+--), (-+-), (---)\}. \quad (5.267)$$

Látható, hogy például

$$|\hat{\Gamma}\rangle_{--+} = (\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes I) |\hat{\Gamma}\rangle_{+++} \quad (5.268)$$

azaz ezek a nem-BPS állapotok a horizonton páros számú előjel flip operátor alkalmazásával kaphatók meg egymásból. Ha állapotunkat vissza Hadamard transzformáljuk akkor a kapott $|\Gamma\rangle$ állapot esetén az előjel flip operátorok (σ_3) helyett a bit flip (σ_1) operátorok töltenek be hasonló szerepet. Vegyük azt is észre, hogy a $|\hat{\Gamma}\rangle_{m_3m_2m_1}$ állapotok mindegyike invariáns a $\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3$ alkalmazásával szemben. Ennek következtében a $|\hat{\Gamma}\rangle_{m_3m_2m_1}$ vektorok kifeszítette altér invariáns tetszőleges számú előjel flip hibával szemben.

Nyilván amennyiben nemcsak a töltések előjelváltásaival hanem a lapos irányok jelenlétének megfelelő hibákat is megengedünk akkor például

$$|\hat{\Gamma}\rangle_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = (E_3 \otimes E_2 \otimes E_1) |\hat{\Gamma}\rangle_{+++} \quad (5.269)$$

alakú egyenleteket kapunk. Ezért az E_a operátorok a fenti altérből kivezető hiba operációkként interpretálhatók.

⁹⁰A dinamikai rendszerünk természetesen továbbra is az (5.222) radiális folyam. Mivel ez a folyam nem a fizikai időben bomlik ki ezért az "indított" és "érkező" kifejezések csupán az $r = \infty$ ($\varrho = 0$) és $r = 0$ ($\varrho = \infty$) tartományokra vonatkoznak.

5.7.4. Extremális megoldások és hibajavító kódok [6]? Ebben a fejezetben az extrémális egycentrumú BPS és nem-BPS megoldások hibajavító kódokkal való lehetséges kapcsolataira hívjuk fel a figyelmet. Tudjuk, hogy az attraktor mechanizmus eredményeképp a horizonton speciális szerkezetű állapotok "desztillálódnak ki". Azt is tudjuk, hogy alapvető fontosságú a szuperszimmetrikus BPS megoldás melyre a horizonton az (5.184) állapot adódik. Megfigyelésünk lényege az, hogy a nem-BPS megoldások mindkét osztályára ($Z = 0$ és $Z \neq 0$) a horizonton kapott állapotokat mint a BPS eset deviációit tekinthetjük. Deviációk alatt a továbbiakban csak az aszimptotikus töltések előjeleinek megváltoztatását értjük⁹¹. Az egyszerűség kedvéért az alapötletet csak a négytöltésű p^0, q_1, q_2, q_3 rendszerre vázoljuk.

Legyen

$$(\text{sgn}(p^0), \text{sgn}(q_3), \text{sgn}(q_2), \text{sgn}(q_1)) \equiv (d, c, b, a), \quad d, c, b, a \in \{+, -\} \quad (5.270)$$

és definiáljuk az alábbi állapotot

$$|\hat{\Gamma}\rangle_{dcba} = i[-dp^0 q_1 q_2 q_3]^{1/4} (d|000\rangle_* + c|011\rangle_* + b|101\rangle_* + a|110\rangle_*) \quad (5.271)$$

Könnyen látható, hogy az (5.184) BPS állapot Hadamard transzformáltja a $|\hat{\Gamma}\rangle_{++++}$ állapot és az (5.266) nem-BPS $Z \neq 0$ állapotok alakja $|\hat{\Gamma}\rangle_{-m_1 m_2 m_3}$. Ezek az állapotok a $|\hat{\Gamma}\rangle_{++++}$ állapotból *páratlan* számú előjel flip által kaphatók. Az (5.233)-(5.235) nem-BPS $Z = 0$ állapotok ebben a képben a $|\hat{\Gamma}\rangle_{+n_1 n_2 n_3}$ alakot öltik ahol $(n_1 n_2 n_3) \in \{(- - +), (- + -), (+ - -)\}$. Ezek az attraktor állapotok a $|\hat{\Gamma}\rangle_{++++}$ állapotból *páros* számú előjel flip által kaphatók.

Mivel a bit flip hibákat a modulusok szerinti lapos kovariáns deriváltak implementálják, ezért ugyanezek a kovariáns deriváltak a Hadamard transzformált bázisban az előjel hibákat implementálják. A BPS attraktor állapotokra a Hadamard transzformált bázisban az előjel hibák tiltottak. Ezek az állapotok védettek a modulusok variálásával előálló előjel hibákkal szemben. A nem-BPS attraktor állapotok az előjel hibákkal szemben már nem immunisak. Aszerint hogy a BPS állapotok variálásával szemben a modulusok fluktuációi páros vagy páratlan számú előjel hibát generálnak nem-BPS állapotok két különböző osztályát kaphatjuk.

Végezetül emlékeztetünk arra, hogy a töltések az extra dimenziós homológia ciklusokra feltekeredő membránok csavarodási számaival kapcsolatosak. A töltésekben megjelenő előjel hibák a csavarodások irányításában bekövetkező változással kapcsolatosak. A hibák generálása topológiai szempontból inekvivalens állapotok közötti alagúteffektusként is interpretálható. A BPS és nem-BPS szektorok közötti átmenet csak nemperturbatív effektusok segítségével történhet.

⁹¹ Nyilván az előző fejezetben tárgyalt lapos irányok ugyan további hibákat generálnak de ezt a nem-BPS állapotokon belül.

6. FEJEZET

Négy-qubit rendszerek és az STU modell

6.1. Motiváció

Az előző fejezetekben láttuk, hogy az STU modellel kapcsolatos eredmények összefonódottság elméleti tárgyalásához alapvető fontosságú a Hodge diagonális bázisban felírt (5.53)-(5.63) $|\Gamma\rangle$ három-qubit állapot. Mint tudjuk a $|\Gamma\rangle$ állapot az extra dimenziókat reprezentáló $T^2 \times T^2 \times T^2$ tórusz geometriájával kapcsolatos. Az általunk vizsgált fekete lyuk megoldások azonban összekapcsolják az extra dimenziók geometriáját a téridő geometriájával. Felmerül a kérdés: vajon összefonódottság elméleti formalizmusunkat lehet-e úgy általánosítani, hogy az a $|\Gamma\rangle$ állapot téridő geometriával való kapcsolatáról is számot adjon?

Extremális statikus gömbszimmetrikus fekete lyuk megoldásokra $|\Gamma\rangle$ amplitúdói a csavardási számokkal kapcsolatos töltésektől és a modulusokon keresztül az r radiális koordinátától függenek. A koordináták függvényében előálló viselkedést az (5.222) dinamikai rendszer írja le. Ezek az egyenletek azonban tartalmazzák a téridő geometriájával kapcsolatos (5.109), (5.142) $U(r)$ gyűrési faktort is melyről a $|\Gamma\rangle$ r -függő amplitúdói nem adnak számot. A legegyszerűbb lehetőség arra, hogy a gyűrési faktort is figyelembe vegyük az, hogy a $|\Gamma\rangle$ állapot helyett az $e^U|\Gamma\rangle$ állapotot tekintjük. Ezzel az (5.161) hatásban az integrandus kizárólag egy háromqubit állapot normájaként állna elő továbbá az (5.156)-(5.157) egyenletek is esztétikusabb alakot ölténének.

Ez a naív próbálkozás azt is sugallja, hogy az e^{2U} faktort egy extra modulus képzetes részével azonosítsuk¹. Valóban, az (5.30) egyenlet jobb oldalán álló második mátrix szerkezete azt a lehetőséget is magába rejt, hogy $x = 0, q = 0$ választással az $e^U|\Gamma\rangle$ állapotban szereplő $\sqrt{y} = e^U$ faktort egy extra qubiten ható új $SL(2, \mathbb{R})$ mátrix részeként lássuk viszont. Sőt, amennyiben az (5.30) egyenlet jobb oldalán álló első mátrixot is figyelembe vesszük akkor láthatjuk, hogy a $|\Gamma\rangle$ állapot helyett helyesebb lenne a

$$|\psi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} e^U |\Gamma\rangle \quad (6.1)$$

állapotot tekintenünk. Az újonnan bevezetett $|\psi\rangle$ norma négyzete

$$||\psi||^2 = e^{2U} V_{BH} \quad (6.2)$$

s így az (5.130) kifejezésben jelenlevő zavaró $1/2$ -es faktortól is megszabadulnánk. Mindebből az az érdekes lehetőség adódik, hogy a téridő geometriáját egy a $|\Gamma\rangle$ három-qubit állapothoz "hozzáfont" extra negyedik qubittal vehetjük figyelembe. A következő fejezetekben megmutatjuk, hogy ez az extra rejtett qubit az STU modell *stacionárius* megoldásainak szerkezetéből valóban kiadódik.

6.2. $D = 3$ dimenzió redukció

A negyedik qubit megtalálásához az STU modell *statikus* megoldásainak vizsgálata helyett az általánosabb *stacionárius* megoldások vizsgálatát kell elvégeznünk. Kiindulópontunk az STU

¹A megszokott $\tau_a = x_a - iy_a$ modulus képzetes részét gyakran $y_a = e^{\phi_a}$ alakba írják. Az x_a és ϕ_a tereket az irodalomban axion illetve dilaton tereknek is hívják.

modell (5.103) hatásfunkcionálja. Ezen a funkcionálon időszerű irányban dimenzióredukciót hajtunk végre. Ez azt jelenti hogy a funkcionálban lévő tereknek megadjuk azon $3 \oplus 1$ alakú dekompozícióját mely abból adódik, hogy a stacionaritás miatt létezik egy időszerű Killing vektor mező majd az időszerű irányt jellemző koordináta szerint kiintegrálunk. A metrikára a fentiek azt jelentik, hogy használhatjuk a

$$ds^2 = -e^{2U}(dt + \omega)^2 + e^{-2U}h_{ij}dx^i dx^j, \quad (6.3)$$

stacionárius ansatz-ot ahol $\omega = \omega_i dx^i$, a hatásban szereplő $\mathcal{F}^I = d\mathcal{A}^I$ térerősségekkel kapcsolatos \mathcal{A}^I mértéktereket pedig szimmetrikus tereknek választjuk. Ez azt jelenti, hogy a mértékterek Killing vektormező irányú Lie deriváltja egy $U(1)$ mértéktranszformáció erejéig zérus. Amennyiben olyan koordinátákat választunk melyben a Killing vektor egy egyszerű időeltolás ezekből a feltételekből következik, hogy a térerősségekre az

$$\mathcal{F}^I = d\mathcal{A}^I = d(\xi^I(dt + \omega) + A^I), \quad I, J = 0, 1, 2, 3 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.4)$$

ansatz választható. Itt az U , ξ^I , A^I , ω_i and h_{ij} mennyiségek olyan 3 dimenziós terek melyek csak az x^i térszerű koordinátáktól függenek².

A dimenzióredukció végrehajtása az alábbi Lagrange sűrűsége vezet [BMG88]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3, \quad (6.5)$$

ahol

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{h}R[h] + dU \wedge *dU + \frac{1}{4}e^{-4U}(d\sigma + \tilde{\xi}_I d\xi^I - \xi^I d\tilde{\xi}_I) \wedge *(d\sigma + \tilde{\xi}_J d\xi^J - \xi^J d\tilde{\xi}_J) \quad (6.6)$$

$$\mathcal{L}_2 = G_{a\bar{b}}d\tau^a \wedge *d\bar{\tau}^{\bar{b}} \quad (6.7)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}e^{-2U}I_{JK}d\xi^J \wedge *d\xi^K + \frac{1}{2}e^{-2U}I^{JK}(d\tilde{\xi}_J - R_{JL}d\xi^L) \wedge *(d\tilde{\xi}_K - R_{KN}d\xi^N) \quad (6.8)$$

ahol $I = \Im\mathcal{N}$ és $R = \Re\mathcal{N}$ lásd (5.106)-(5.107), továbbá

$$d\tilde{\xi}_J \equiv R_{JK}d\xi^K - e^{2U}I_{JK}*(dA^K + \xi^K d\omega) \quad (6.9)$$

$$d\sigma \equiv e^{4U}*\omega + \xi^J d\tilde{\xi}_J - \tilde{\xi}_J d\xi^J \quad (6.10)$$

A fenti bonyolult Lagrange sűrűséget az alábbi kompakt formába írhatjuk [BMG88, GLP07, BMP10]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{h}R[h] + g_{mn}\partial_a\Phi^m\partial^a\Phi^n \quad (6.11)$$

ahol az $U, \sigma, \xi^I, \tilde{\xi}_I, \tau^a, \bar{\tau}^{\bar{b}}$ ($I = 0, 1, 2, 3$ és $a, b = 1, 2, 3$) skalártereket a $\Phi^m, m = 1, 2, \dots, 16$ mennyiséggel jelöltük. Megmutatható [BMG88, GLP07], hogy ez a 16 mennyiség lokálisan a 16 dimenziós $\mathcal{M}_3 = SO(4, 4)/SL(2, \mathbb{R})^{\times 4}$ faktorteret az \mathcal{M}_3 modulusteret paraméterezi. Ennek az új modulustérnek a g_{mn} metrikája pseudo-Riemann. A $ds^2_{\mathcal{M}_3} = g_{mn}\Phi^m\Phi^n$ ívelemnégyszet explicit alakja

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}ds^2_{\mathcal{M}_3} &= G_{a\bar{b}}(\tau, \bar{\tau})d\tau^a d\bar{\tau}^{\bar{b}} + dU^2 + \frac{1}{4}e^{-4U}(d\sigma + \tilde{\xi}_J d\xi^J - \xi^J d\tilde{\xi}_J)^2 \\ &+ \frac{e^{-2U}}{2} \left[I_{JK}d\xi^J d\xi^K + I^{JK}(d\tilde{\xi}_J - R_{JL}d\xi^L)(d\tilde{\xi}_K - R_{KM}d\xi^M) \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

A metrika pseudoriemann jellege azzal kapcsolatos, hogy az (5.107) mátrix negatív definit. Ezt gyorsan beláthatjuk ha felismerjük, hogy a (6.12) második sorában szereplő kifejezés második

²Jelölésünk ezen a ponton félrevezető hiszen a három x^i koordinátát könnyen összekeverhetjük a modulusokban szereplő $\tau^a = x^a - iy^a$ valós részével. A két fajta x között csak az eltérő indexelés tesz különbséget. Az x^i -ket azonban csak ebben az alfejezetben használjuk, egyébként a megszokott jelölések érvényesek.

része az (5.131) fekete lyuk potenciál szerkezetét mutatja, ez pedig egy norma négyzet negatívjaként áll elő³.

A (6.11) kompakt alak azt mutatja, hogy az eredeti modell stacionárius fekete lyuk megoldásainak vizsgálata átfogalmazható egy pszeudo-Riemann target terű nemlineáris szigma modellhez csatolt 3 dimenziós gravitáció megoldásainak vizsgálatává. Az STU modellre azonban a nemlineáris szigma modell target tere: $\mathcal{M}_3 = SO(4,4)/SL(2, \mathbb{R})^{\times 4}$. A 2.6.2. fejezetben a négy-qubit rendszerek geometriájának megértéséhez pontosan ennek a térnek a komplexifikáltját használtuk. Ebből következően az STU modell stacionárius fekete lyuk megoldásainak osztályozása vélhetően kapcsolatban áll a négy-qubit összefonódott állapotok SLOCC klasszifikációjával⁴.

Figyeljük meg, hogy a 3 dimenzós leírásban az STU modell dualitási csoportján kívül a bevezetésben megsejtett extra $SL(2, \mathbb{R})$ szimmetriacsoport is kiadódik. Ezt a téridő geometriával kapcsolatos rejtett szimmetriacsoportot az általános relativitáselmélet szakértői régóta ismerik. A csoportot az irodalomban Ehlers-féle $SL(2, \mathbb{R})$ csoportnak nevezik [Ehl57, Ger71]. Ismeretes, hogy az Ehlers csoporttal szemben az U gyűrési faktor és a (6.10)-ben bevezetett σ úgynevezett NUT potenciál [NTU63] egy dubletként transzformálódik. Statikus megoldásokra a NUT potenciál zérus s így azt várjuk, hogy egy alkalmas négy-qubit állapotok használatán alapuló formalizmusban $\sigma = 0$ esetén a bevezetőben megsejtett (6.1) kifejezésen alapuló effektív három-qubit leírást kapjuk vissza. A következő fejezetekben egy ilyen extra "Ehlers" qubit bevezetésén alapuló formalizmust építünk fel.

6.3. Négy-qubit formalizmus

6.3.1. Négy-qubit Iwasawa parametrizáció [8]. Kiindulópontunk a háromdimenziós szigma modell $SO(4,4)/SO(2,2) \times SO(2,2) \simeq SO(4,4)/SL(2, \mathbb{R})^{\otimes 4}$ modulusterének négy-qubit geometriát tükröző parametrizációjának megtalálása. Ehhez a fenti 16 dimenziós faktorteret lokálisan a (6.6)-(6.8) Lagrange sűrűségben előforduló $x_a, y_a, \phi \equiv 2U, \sigma, \xi^I$ and $\tilde{\xi}_I$ terekkel fogjuk jellemezni. Legyen

$$\zeta^I \equiv \sqrt{2}\xi^I, \quad \tilde{\zeta}_I \equiv \sqrt{2}\tilde{\xi}_I. \quad (6.13)$$

Ezekkel a jelölésekkel a faktortér Iwasawa coset reprezentánsa [BMP10]

$$V \equiv e^{-\frac{1}{2}\phi H_0} \left(\prod_{a=1}^3 e^{-\frac{1}{2} \log y_a H_a} e^{-x_a E_a} \right) e^{-\zeta^I E_{q_I} - \tilde{\zeta}_I E_{p_I}} e^{-\sigma E_0} \quad (6.14)$$

ahol a négy $SL(2, \mathbb{R})$ csoport generátorai $H_\alpha, E_\alpha, F_\alpha, \alpha = 0, 1, 2, 3$ kielégítik a

$$[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha, \quad [H_\alpha, E_\alpha] = 2E_\alpha, \quad [H_\alpha, F_\alpha] = -2F_\alpha, \quad (6.15)$$

relációkat. Az $so(4,4)$ azon generátorait melyek nem tartoznak az $sl(2) \oplus sl(2) \oplus sl(2) \oplus sl(2)$ részalgebrába az $E_{p^I}, E_{q_I}, F_{p^I}, F_{q_I}, I = 0, 1, 2, 3$ módon jelöltük. Az algebra generátorainak ezen címkézése a (2.179)-ből már ismert

$$\mathfrak{so}(4,4) = [\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})]^4 \oplus (2, 2, 2, 2) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad (6.16)$$

dekompozíciónak felel meg.

³Lásd még az (5.136) egyenlet szerkezetét.

⁴Természetesen az $\mathcal{M}_3 = SO(4,4)/SL(2, \mathbb{R})^{\times 4}$ modulustérben csak az $SL(2, \mathbb{R})^{\times 4}$ valódi SLOCC csoport jelenik meg, míg a négy qubit klasszifikáció megfelelő csoportja a komplex $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ csoport. Ezért ezen a szinten még egyáltalán nem világos miben is áll pontosan a fent vázolt kapcsolat.

A fenti dekompozícióban szereplő 28 darab 8×8 -as mátrix explicit alakját a (2.180)-(2.185) egyenletek négy qubites nyelvezetében már részletesen kidolgoztuk. Ezen eredmények felhasználásával kapjuk, hogy

$$\prod_{\alpha=0}^3 e^{-\frac{1}{2} \log y_{\alpha} H_{\alpha}} e^{-x_{\alpha} E_{\alpha}} = \begin{pmatrix} M_3 \otimes M_2 & 0 \\ 0 & M_1 \otimes M_0 \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

ahol

$$M_{\alpha} \equiv \frac{1}{\sqrt{y_{\alpha}}} \begin{pmatrix} 1 & -x_{\alpha} \\ 0 & y_{\alpha} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

és

$$x_0 \equiv \sigma, \quad y_0 \equiv e^{\phi} = e^{2U}. \quad (6.19)$$

Figyeljük meg, hogy a modulusokat tartalmazó N_{α} mátrixok az (5.30) jobb oldalán megjelenő S mátrix inverz transzponáltjának szerkezetét mutatják. Az Iwasawa dekompozíció fennmaradó részének alakja

$$e^{-\zeta^I E_{q_I} - \tilde{\zeta}^I E_{p^I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\zeta g \\ \zeta^T g & \mathbf{1} + \frac{1}{2} \Delta \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

ahol $\mathbf{1} \equiv I \otimes I$, $g \equiv \varepsilon \otimes \varepsilon$

$$\Delta = -\zeta^T g \zeta g = \begin{pmatrix} \zeta^{(0)} \cdot \zeta^{(0)} & \zeta^{(0)} \cdot \zeta^{(1)} \\ \zeta^{(0)} \cdot \zeta^{(1)} & \zeta^{(1)} \cdot \zeta^{(1)} \end{pmatrix} \varepsilon \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

és

$$\zeta \equiv \begin{pmatrix} \zeta_{0000} & \zeta_{0001} & \zeta_{0010} & \zeta_{0011} \\ \zeta_{0100} & \zeta_{0101} & \zeta_{0110} & \zeta_{0111} \\ \zeta_{1000} & \zeta_{1001} & \zeta_{1010} & \zeta_{1011} \\ \zeta_{1100} & \zeta_{1101} & \zeta_{1110} & \zeta_{1111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\zeta}_0 & 0 & \tilde{\zeta}_1 & 0 \\ \tilde{\zeta}_2 & 0 & \zeta^3 & 0 \\ \tilde{\zeta}_3 & 0 & \zeta^2 & 0 \\ \zeta^1 & 0 & \zeta^0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

és felhasználtuk az (5.182) definíciót ahol a három-qubit rész speciális qubitja az első qubit⁵. Mindezeket felhasználva a coset reprezentánsra kapjuk, hogy⁶

$$V = \begin{pmatrix} M_3 \otimes M_2 & 0 \\ 0 & M_1 \otimes M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\zeta g \\ \zeta^T g & \mathbf{1} + \frac{1}{2} \Delta \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Figyeljük meg, hogy a kitüntetett i_0 "Ehlers"-qubiton túl a (6.23) alak az i_1 qubitor is kitünteteti. Az $i_3 i_2 i_1$ hármastól azonban bármelyiket kitüntethetjük. Ennek eredményeképpen három különböző coset reprezentánsst kaphatunk, melyek csak a $i_3 i_2 i_1$ qubitek ciklikus permutációjában különböznek. A permutációs szimmetria így összekapcsolódik az $\mathfrak{so}(8)$ algebra trialitási szimmetriájával⁷.

⁵A qubitoikat jobbról balra számozzuk: $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Tehát például a 4×4 -es ζ mátrixnak megfelelő négy-qubit állapot indexszerkezete: $\zeta_{i_3 i_2 i_1 i_0}$. A 0-dik qubit a speciális "Ehlers"-qubit. Ennek megfelelően a (6.22) mátrix egy négy qubit állapotba beágyazott három-qubit állapot szerkezetét mutatja ahol csak az $i_0 = 0$ -val jellemzett amplitúdók különböznek zérustól. A megszolott háromqubit indexek: $i_3 i_2 i_1$. Ennek megfelelően az (5.182) definícióban az i_1 indexes qubit is speciális qubit.

⁶A (6.22) mátrix speciális szerkezete miatt $e^{x_0 E_0} e^{-\zeta^I E_{q_I} - \tilde{\zeta}^I E_{p^I}} e^{-x_0 E_0} = e^{-\zeta^I E_{q_I} - \tilde{\zeta}^I E_{p^I}}$.

⁷A trialitási szimmetria összekapcsolaja az $\mathfrak{so}(8)$ algebra nyolc dimenziós vektor, spinor és konjugált spinor ábrázolásait.

6.3.2. A modulus tér ívelem négyzete [8]. A (2.179) kommutátorok szerkezete azt mutatja, hogy az $SO(4, 4)/SO(2, 2) \times SO(2, 2) \simeq SO(4, 4)/SL(2, \mathbb{R})^{\otimes 4}$ modulus tér egy szimmetrikus tér [Gil12]. A $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ dekompozíción alapuló szimmetrikus terekre a félegyszerű \mathfrak{g} Lie-algebra Cartan-Killing formája a faktortéren egy metrikát indukál melynek alakja

$$ds^2 = \text{Tr}(\mathcal{P})^2 \quad (6.24)$$

ahol

$$\mathcal{P} \equiv \frac{1}{2}(dVV^{-1} + \eta(dVV^{-1})^T \eta) \quad (6.25)$$

és a szimmetrikus tereknél használatos involúció alakja most

$$\eta = \begin{pmatrix} I \otimes I & 0 \\ 0 & -I \otimes I \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

A (6.23) coset reprezentáns explicit alakját véve megmutatható, hogy

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Sigma_3 \otimes I_2 + I_3 \otimes \Sigma_2 & -\Phi g \\ \Phi^T g & \Sigma_1 \otimes I_0 + I_1 \otimes \Sigma_0 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

ahol

$$|\Phi\rangle = (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon)|\Psi\rangle + |\Psi\rangle \quad (6.28)$$

$$|\Psi\rangle = (M_3 \otimes M_2 \otimes M_1 \otimes M_0)|d\zeta\rangle \quad (6.29)$$

és

$$\Sigma_a = \frac{1}{y_a} \begin{pmatrix} -dy_a & -dx_a \\ -dx_a & dy_a \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (6.30)$$

illetve

$$\Sigma_0 = \frac{1}{y_0} \begin{pmatrix} -dy_0 & -dx_0 + w \\ -dx_0 + w & dy_0 \end{pmatrix}, \quad w = \frac{1}{2}(\zeta^I d\tilde{\zeta}_I - \tilde{\zeta}_I d\zeta^I) \quad (6.31)$$

Ezeket az eredményeket a (6.24) formulában felhasználva kapjuk

$$ds_{\mathcal{M}_3}^2 = \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j^2 + dy_j^2}{y_j^2} + \frac{(dx_0 - w)^2 + dy_0^2}{y_0^2} - \|\Psi\|^2, \quad (6.32)$$

ahol

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \text{Tr}(\Psi^T \Psi) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Phi g \Phi^T g) = \frac{1}{2} \varepsilon^{i_3 i'_3} \varepsilon^{i_2 i'_2} \varepsilon^{i_1 i'_1} \varepsilon^{i_0 i'_0} \Phi_{i_3 i_2 i_1 i_0} \Phi_{i'_3 i'_2 i'_1 i'_0}. \quad (6.33)$$

Ez a formula explicit módon mutatja a háromdimenziós modulus tér pseudo-Riemann szerkezetét illetve azt is, hogy a bevezetőben megsejtett Ehlers-qubit hogyan járul hozzá a (6.29) négy-qubit állapotba beágyazott három-qubit állapot megjelenéséhez. Könnyű ellenőrizni azt is, hogy a (6.32) ívelemnégyzet pontosan a (6.12) explicit alakot szolgáltatja. A (2.163) kifejezés azt mutatja, hogy $\langle \Psi | \Psi \rangle$ felírható úgy is mint a speciális szerkezetű (6.28) négy-qubit állapot kvadratikusan polinominvariánsa.

6.3.3. Hadamard transzformált kép [8]. Hasznos a fenti négy qubit állapotokat áttranszformálni a dolgozatban (5.195)-ben már használt diszkrét Fourier transzformált bázisba. Legyen \bar{U} az (5.30)-(5.31) -ben bevezetett 2×2 -es mátrix komplex konjugáltja és

$$U \equiv \begin{pmatrix} \bar{U} \otimes \bar{U} & 0 \\ 0 & \bar{U} \otimes \bar{U} \end{pmatrix}, \quad \bar{U} \equiv HP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

ahol

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

A transzformált állapot

$$|\hat{\Psi}\rangle = (H \otimes H \otimes H \otimes H)(P \otimes P \otimes P \otimes P)(M_3 \otimes M_2 \otimes M_1 \otimes M_0)|d\zeta\rangle \quad (6.36)$$

és a transzformált mátrixok

$$\hat{e}_\alpha \equiv \bar{U}\Sigma_\alpha U^T = \begin{pmatrix} 0 & \bar{e}_\alpha \\ e_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad e_\alpha = \frac{-i}{y_j} d\tau_\alpha \quad (6.37)$$

$$d\tau_a = dx_a - idy_a, \quad d\tau_0 = (dx_0 - w) - idy_0 \quad (6.38)$$

transzformált $\hat{\mathcal{P}} = \mathbf{U}\mathcal{P}\mathbf{U}^\dagger$ mátrixra vezetnek melynek alakja

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e_2 & e_3 & 0 & \bar{\mathcal{E}}_1 & 0 & 0 & \bar{\mathcal{E}}_0 \\ \bar{e}_2 & 0 & 0 & e_3 & 0 & -\mathcal{E}_3 & -\bar{\mathcal{E}}_2 & 0 \\ \bar{e}_3 & 0 & 0 & e_2 & 0 & -\mathcal{E}_2 & -\bar{\mathcal{E}}_3 & 0 \\ 0 & \bar{e}_3 & \bar{e}_2 & 0 & \mathcal{E}_0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_1 \\ -\mathcal{E}_1 & 0 & 0 & -\bar{\mathcal{E}}_0 & 0 & e_0 & e_1 & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{E}}_3 & \bar{\mathcal{E}}_2 & 0 & \bar{e}_0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & \mathcal{E}_2 & \mathcal{E}_3 & 0 & \bar{e}_1 & 0 & 0 & e_0 \\ -\mathcal{E}_0 & 0 & 0 & -\bar{\mathcal{E}}_1 & 0 & \bar{e}_1 & \bar{e}_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.39)$$

Itt a négy komplex \mathcal{E}_α mennyiség⁸ a szokásos négy független (5.57)-(5.58) háromqubit amplitúdóhoz hasonló szerkezetű melyeket most a szupergravitációs irodalomban használatos

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{2}e^{\frac{\kappa}{2}-U} X^I (\mathcal{N}_{IJ} d\zeta^J - d\tilde{\zeta}_I), \quad \mathcal{E}_j = 2i\sqrt{2}y_j e^{-U} f_j^I (\bar{\mathcal{N}}_{IJ} d\zeta^J - d\tilde{\zeta}_I) \quad (6.40)$$

alakba írtunk ahol

$$f_1^I = e^{\frac{\kappa}{2}} (\partial_1 + (\partial_1 K)) X^I = e^{\frac{\kappa}{2}} \frac{1}{\bar{\tau}_1 - \tau_1} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\tau}_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}, \quad \text{stb.} \dots \quad (6.41)$$

és $X^I = (1, \tau_1, \tau_2, \tau_3)^T$, $K = -\log(y_1 y_2 y_3)$. Az \mathcal{N}_{IJ} mátrix explicit szerkezetét illetően lásd az (5.106) és (5.107) képleteket.

Ezeknek a *komplex* mennyiségeknek a segítségével az ívelemnégyszet most a

$$ds_{\mathcal{M}_3}^2 = \sum_{\alpha=0}^3 (\bar{e}_\alpha e_\alpha - \bar{\mathcal{E}}_\alpha \mathcal{E}_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{d\bar{z}_\alpha z_\alpha}{y_\alpha^2} - \|\hat{\Psi}\|^2 \quad (6.42)$$

alakot ölti.

6.3.4. Az ívelemnégyszet mint négy-qubit invariáns [8]. Az előző fejezetben a $\hat{\mathcal{P}}$ mennyiség 16 komplex komponensét egy 8×8 -as mátrixba rendeltük. Láthatóan a komponensek kapott (6.39) elrendezése igen speciális mintázatot követ. Ez a megfigyelés adja azt az ötletet, hogy $\hat{\mathcal{P}}$ komponenseit egy speciális valósági feltételeknek eleget tevő új négy qubit állapotba szervezzük.

Címkezzük a 8×8 -as mátrixunkat sorait és oszlopait a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 módon, de bináris jelölésben: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Permutáljuk a sorokat és oszlopokat a

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \mapsto (7, 1, 2, 4, 3, 5, 6, 0) \quad (6.43)$$

vagy

$$(000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111) \mapsto (111, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 000) \quad (6.44)$$

⁸Ezek akárcsak az e_α mennyiségek az \mathcal{M}_3 modulustérrel kapcsolatos egy-formák.

leképezésnek megfelelően⁹. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a fenti permutáció hatására az $\mathfrak{so}(4, 4)$ szerkezetért felelős (2.180) algebrai reláció (2.181) mátrixa invariáns.

A fenti Π permutációt a $\hat{\mathcal{P}}$ mátrixra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\hat{\mathcal{P}}^\Pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Lambda g \\ -\Lambda^T g & 0 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{0000} & \Lambda_{0001} & \Lambda_{0010} & \Lambda_{0011} \\ \Lambda_{0100} & \Lambda_{0101} & \Lambda_{0110} & \Lambda_{0111} \\ \Lambda_{1000} & \Lambda_{1001} & \Lambda_{1010} & \Lambda_{1011} \\ \Lambda_{1100} & \Lambda_{1101} & \Lambda_{1110} & \Lambda_{1111} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\mathcal{E}_0 & -e_0 & -e_1 & -\bar{\mathcal{E}}_1 \\ e_2 & \bar{\mathcal{E}}_2 & \mathcal{E}_3 & \bar{e}_3 \\ e_3 & \bar{\mathcal{E}}_3 & \mathcal{E}_2 & \bar{e}_2 \\ -\mathcal{E}_1 & -\bar{e}_1 & -\bar{e}_0 & -\bar{\mathcal{E}}_0 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

Definiáljunk egy új négy-qubit állapotot

$$|\Lambda\rangle = \sum_{i_3, i_2, i_1, i_0=0,1} \Lambda_{i_3 i_2 i_1 i_0} |i_3 i_2 i_1 i_0\rangle \quad (6.47)$$

Azonnal látható, hogy az újonnan bevezetett állapotunk a

$$|\overline{\Lambda}\rangle = (\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1) |\Lambda\rangle, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

valóssági feltételnek tesz eleget. A (2.186) formulából az is látható, hogy tetszőleges $G \in SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ (2.185) $\hat{\mathcal{P}}^\Pi \mapsto G \hat{\mathcal{P}}^\Pi G^{-1}$ adjungált hatása a $|\Lambda\rangle$ állapoton G szokásos SLOCC hatását indukálja. Könnyen belátható az is, hogy ennek a SLOCC hatásnak azon részcsoportha mely a (6.48) valóssági feltételt tiszteletben tartja : $SU(1, 1)^{\times 4}$.

Tisztázzuk a kapott transzformációk és az újonnan bevezetett állapot fizikai jelentését! Ehhez számoljuk ki a $|\Lambda\rangle$ állapotra a (2.163) I_1 kvadratikusan négy-qubit invariánst! Kapjuk, hogy

$$I_1(\Lambda) = -ds_{\mathcal{M}_3}^2 \quad (6.49)$$

azaz a háromdimenziós modulustér pszeudo-Riemann ívelemnégyzete a $|\Lambda\rangle$ állapotra számolt kvadratikusan négy-qubit invariáns negatívja. Az irodalomból ismeretes, hogy \mathcal{M}_3 egy kvaterniós Kähler sokaság [FS90, BMP10, GNPW07]. A fenti ívelemnégyzettel kapcsolatos metrika \mathcal{M}_3 minden pontjában a megfelelő érintőtérre ható bilineáris formát ad. A (6.34) és (6.44) transzformációk után a metrikára már mint a komplexifikált érintőtérre ható bilineáris formák símán változó seregére tekinthetünk. A metrikát tehát az általános relativitás megszokott szemléletének megfelelően egy símán változó "mozgó bázis" (n-bein) szerint dekomponálhatjuk. Ebben a képben a transzformációink fizikai jelentése az, hogy segítségükkel a komplexifikált érintőtérre egy olyan bázist választhatunk mely kovariáns konstans a spin konnexióra nézve. Megmutatható, hogy a konnexió holonómiája olyan, hogy segítségével a 16 dimenziós érintőnyaláb lokálisan egy 8 és egy 2 dimenziós vektornyaláb tenzorszorzataként áll elő [FS90, BMP10, GNPW07]. Esetünkben a 8 dimenziós rész felel meg az $i_3 i_2 i_1$ három-qubit résznek a 2 dimenziós rész pedig a kitüntetett i_0 qubitnek. Figyeljük meg, hogy a kitüntetett qubittal kapcsolatos $I_3 \otimes I_2 \otimes I_1 \otimes S_0$ lokális SLOCC transzformációk kapcsolatba hozzák a (6.46) mátrix első oszlopát a másodikkal illetve a harmadikkal a negyedikkel. Ezek a transzformációk összekapcsolják az \mathcal{E}_0 és e_0 illetve az $\bar{\mathcal{E}}_a$ és e_a mennyiségeket¹⁰.

⁹Azaz alkalmazzuk a $\Pi \equiv (07)(34)$ permutációt. A bináris jelölésben láthatóan ez azt jelenti, hogy a permutáció után két négyes blokkot kapunk. Az elsőben páratlan a másodikban páros számú egyessel.

¹⁰Ezek a transzformációk tehát egy fontos konjugálástól eltekintve az azonos indexű \mathcal{E}_α és e_α mennyiségeket kapcsolják össze.

6.4. Fekete lyuk megoldások mint geodetikuskok

6.4.1. Extremális megoldások mint fényszerű geodetikuskok Láttuk, hogy az STU modell stacionárius fekete lyuk megoldásainak vizsgálatához a (6.11) Lagrange sűrűségeen alapuló háromdimenziós gravitációhoz csatolt olyan nemlineáris szigma modellt kell tanulmányoznunk melynek target tere \mathcal{M}_3 . Az egyszerűség kedvéért célszerű olyan stacionárius megoldásokra szorítkozni melyekre a (6.3)-ban szereplő térszerű metszetek h_{ij} metrikája lapos¹¹. Az általunk tanulmányozni kívánt gömbszimmetrikus egycentrum megoldások ehhez a típushoz tartoznak. Ebben az esetben az \mathcal{M}_3 modulustérrel kapcsolatos 16 skalártér dinamikája lecsatolódik a háromdimenziós gravitáció dinamikájától és a téridő (6.3) ívelem négyzete a

$$ds^2 = -e^{2U}(dt + \omega)^2 + e^{-2U}(dr^2 + r^2(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2))) \quad (6.50)$$

alakot ölti ahol a gyűrési faktor és a skalárterek is csak az r koordinátától függenek. Célszerű ismét bevezetni a $\varrho = 1/r$ koordinátát mely szerinti deriválást továbbra is ponttal fogunk jelölni. Ekkor a lecsatolódott skalárterek dinamikáját az

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \int d\varrho g_{mn} \dot{\Phi}^m \dot{\Phi}^n \quad (6.51)$$

effektív hatás írja le ahol a metrika (6.12) explicit alakját felhasználva kapjuk

$$S_{\text{eff}} = \int d\varrho \left(\dot{U}^2 + G_{ab} \dot{\tau}^a \dot{\tau}^b + \frac{1}{4} e^{-4U} (\dot{\sigma} + \mathbf{Z}^T C \dot{\mathbf{Z}})^2 + \frac{1}{2} e^{-2U} \dot{\mathbf{Z}}^T \mathcal{M}_4 \dot{\mathbf{Z}} \right) \quad (6.52)$$

ahol $\mathbf{Z} = (\xi^I, \tilde{\xi}_I)^T$ egy 8 komponensű vektor \mathcal{M}_4 az (5.131)-ben szereplő 8×8 -as mátrix és¹² $C = -\varepsilon \otimes I \otimes I$.

A (6.52) hatás Lagrange függvényében σ ciklikus koordináta ezért a hozzá kanonikusan konjugált impulzus megmaradó mennyiség

$$p_\sigma \equiv k = \frac{\partial L}{\partial \sigma} \quad (6.53)$$

mely az úgynevezett NUT-töltés [NTU63]. Definiáljuk a \mathbf{Z} potenciálokhoz kanonikusan konjugált impulzusokat

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} \quad (6.54)$$

Ezekkel a jelölésekkel a hatás a

$$S_{\text{eff}} = \int d\varrho \left(\dot{U}^2 + G_{ab} \dot{\tau}^a \dot{\tau}^b + e^{4U} k^2 + \frac{1}{2} e^{2U} \mathbf{Q}^T \mathcal{M}_4 \mathbf{Q} \right) \quad (6.55)$$

alakba írható ahol

$$\mathbf{Q} = C\mathbf{P} - k\mathbf{Z} \quad (6.56)$$

Látható, hogy statikus megoldásokra a NUT töltés zérus ($k = 0$) ekkor a \mathbf{P} mennyiség, s így a \mathbf{Q} is megmarad. Ha \mathbf{Q} megfelelő nyolc komponensét a p^I, q_I töltésekkel azonosítjuk akkor az utolsó tag a fekete lyuk potenciál *negatívját* szolgáltatja. Ezért a (6.55)-beli Lagrange függvény a statikus esetből ismert (5.136) kényszer adja¹³.

Mivel ez a Lagrange függvény a (6.51) hatásból származik melynek extremálisai az \mathcal{M}_3 geodetikusai ezért az (5.136) kényszer $c = 0$ -nak megfelelő esete fényszerű geodetikusokat ad. Tekintettel arra, hogy ez a feltétel a statikus esetben az extremális fekete lyukakat jellemzi

¹¹Az ilyen megoldásokat gyengén extremális megoldásoknak is nevezik [BMP10].

¹²A C mátrix az $Sp(8, \mathbb{R})$ szimplektikus csoport szimplektikus struktúramátrixa. Az STU modell $SL(2, \mathbb{R})^{\times 3}$ dualitási csoportja természetes módon beágyazható ebbe a csoportba [BKR⁺96]. Általában is igaz, hogy a húrelméleti kompaktifikációknál felbukkanó effektív $N = 2$ szupergravitációknál az elektromos-mágneses dualitás egy természetes szimplektikus struktúra megjelenésével írható le [CDF96].

¹³Emlékeztetünk arra, hogy ebben a fejezetben kényelmi okokból $G_N = 1$.

ezért azt a fontos a stacionárius esetben is érvényes eredményt kaptuk, hogy: a háromdimenziós képből az extrémális fekete lyuk megoldások a pseudo-Riemann \mathcal{M}_3 modulustér ϱ segítségével affin módon paraméterezett fényszerű geodetikusaiként állnak elő. Az előző fejezetből azt is látjuk, hogy ezeket a fekete lyukakat a négy-qubit képből a (6.49) kényszer miatt az jellemzi, hogy a nekik megfelelő $|\Lambda\rangle$ állapotra a kvadratikus négy qubit invariáns zérus.

6.4.2. Megmaradó mennyiségek [8]. Az előző fejezet alapján a stacionárius gyengén extrémális fekete lyuk megoldások a (6.51) hatás geodetikusai lesznek. Ezen megoldások speciális esetei az extrémális megoldások melyek fényszerű geodetikusoknak felelnek meg. A fekete lyuk megoldásokat leíró geodetikus mozgás a $G/H \simeq \mathcal{M}_3$ modulustéren zajlik ahol $G = SO(4, 4)$ és $H = SL(2, \mathbb{R})^{\times 4}$. Tudjuk, hogy \mathcal{M}_3 egy szimmetrikus tér melyet a (6.26) által definiált (6.16) Cartan dekompozícióval jellemezhetünk. A $g \in G$ és $h \in H$ csoportelemek a (6.14) coset reprezentánsok a $V \mapsto gVh$ módon hatnak. Vezessük be az új

$$\mathcal{L} = V\eta V^T \eta \quad (6.57)$$

H invariáns coset reprezentáns! Ekkor megmutatható [CRR11], hogy a (6.51) hatás variálásával kapható geodetikus egyenletek az egyszerű

$$\frac{d}{d\varrho} (\mathcal{L}^{-1} \dot{\mathcal{L}}) = 0 \quad (6.58)$$

alakot öltik. Az egyenletek megoldása

$$\mathcal{L}(\varrho) = \mathcal{L}(0)e^{Q\varrho} \quad (6.59)$$

Belátható [CRR11], hogy a Q mátrix mozgásállandó (Noether töltés) melynek alakja

$$Q = 2V^{-1}\mathcal{P}V = \begin{pmatrix} Q_{11} & -gQ_{12} \\ gQ_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad g = \varepsilon \otimes \varepsilon \quad (6.60)$$

ahol a definíciókat illetően lásd a (6.23) és (6.27) kifejezéseket. A Q megmaradó töltés láthatóan egy 8×8 -as mátrix alakját ölti mely négy 4×4 -es blokkból áll. A Q_{12} offdiagonális blokk a (6.22) mátrix szerkezetét mutatja melyet egy $|Q_{12}\rangle$ négy-qubit állapotba szervezhetünk

$$|Q_{12}\rangle = e^{-2U} (N_3 \otimes N_2 \otimes N_1 \otimes I) |\dot{\zeta}\rangle - 2k(\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes I) |\zeta\rangle, \quad (6.61)$$

ahol

$$N_a \equiv M_a^T M_a, \quad a = 1, 2, 3 \quad (6.62)$$

k a (6.53) NUT töltés és M definícióját illetően lásd (6.18). A Q_{12} -ben rejlő nyolc megmaradó mennyiséget a

$$Q_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p^0 & 0 & -p^1 & 0 \\ -p^2 & 0 & q_3 & 0 \\ -p^3 & 0 & q_2 & 0 \\ q_1 & 0 & q_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

alakba írva látjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\gamma\rangle \otimes |0\rangle = (\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes I) |Q_{12}\rangle \quad (6.64)$$

ahol $|\gamma\rangle$ a már jól ismert (5.60)-(5.61) három-qubit töltésállapot ¹⁴.

Tekintsük most a (6.34)-(6.36) állapotoknak megfelelő

$$|\hat{\Psi}\rangle = (\bar{U} \otimes \bar{U} \otimes \bar{U} \otimes \bar{U})(M_3 \otimes M_2 \otimes M_1 \otimes M_0) |\dot{\zeta}\rangle \quad (6.65)$$

¹⁴A $|Q_{12}\rangle$ állapot és a (6.56)-ban definiált töltéshez asszociált $|\mathbf{Q}\rangle$ állapot hasonló szerkezetűek mégsem azonosak. A két mennyiség közötti kapcsolatot illetően lásd [BMP10, 8]. A (6.63)-ben megjelenő $\frac{1}{\sqrt{2}}$ faktor eredete a kényelmi okokból bevezetett (6.13) ujanormált potenciál használatára vezethető vissza.

állapotot! Fejezzük ki (6.61)-ből $|\dot{\zeta}\rangle$ -ot és használjuk ki a (6.63)-(6.64) és a

$$\bar{U}M^{T-1} = \mathcal{U}S\sigma_3 \quad (6.66)$$

összefüggéseket¹⁵. Mindezeket felhasználva kapjuk, hogy

$$|\hat{\Psi}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}e^U|\Gamma^{(k)}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (6.67)$$

ahol

$$|\Gamma^{(k)}\rangle = (\mathcal{U}S_3 \otimes \mathcal{U}S_2 \otimes \mathcal{U}S_1)(|\gamma\rangle + 2k(\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1)|\mathbf{Z}\rangle) \quad (6.68)$$

és a $|\mathbf{Z}\rangle$ három-qubit állapot a (6.13)-ban szereplő nyolc darab ξ^I, ξ_I potenciálból épül fel a (6.22) minta szerint¹⁶. Figyeljük meg, hogy $k = 0$ esetén

$$|\Gamma^{(k=0)}\rangle = |\Gamma\rangle \quad (6.69)$$

és ekkor $|\hat{\Psi}\rangle = -|\psi\rangle$ ahol $|\psi\rangle$ a (6.1)-ben megsejtett állapot. Továbbá mivel ekkor

$$||\hat{\Psi}||^2 = e^{2U}V_{BH} \quad (6.70)$$

a megmaradó töltésekkel paraméterezett négy-qubit állapotunk tudja a (6.2) feltételt is. A (6.68) három-qubit állapot a jólismert (5.61) állapot stacionárius megoldásokra is érvényes formális általánosításának tekinthető.

6.4.3. BPS megoldások és szeparabilitás Tekintsük most a (6.47) $|\Lambda\rangle$ négy-qubit állapotot. Ez az állapot a (6.45) és a (6.60) összefüggéseken keresztül konjugált kapcsolatban áll a Q megmaradó mennyiségekkel, ezek pedig a fekete lyuk megoldásokat generáló (6.59) geodetikusokkal. Mivel a négy qubit állapotok klasszifikációjának alapjául szolgáló (2.186) \mathcal{R}_Λ mátrix (6.45) miatt éppen $2\hat{P}^{\text{II}}$ és ez a mátrix a geodetikusokat mint fekete lyuk megoldásokat generáló (6.60) Q mátrixszal konjugált kapcsolatban áll ezért azt a fontos eredményt kaptuk, hogy a (6.48) valósági feltételeknek eleget tevő négy-qubit állapotok és az stu-modell fekete lyuk megoldásainak osztályai között kapcsolat áll fenn.

Ennek a kapcsolatnak az illusztrálására tekintsünk egy olyan esetet amikor a négy-qubit közül az egyik szeparálható. Mint tudjuk a $|\Lambda\rangle$ negyedik qubitja speciális szerepet játszik. Ez az i_0 -val indexelt negyedik qubit akkor és csak akkor szeparálható ha $\Lambda_{i_3i_2i_10} = \lambda\Lambda_{i_3i_2i_11}$. A (6.48) valósági feltétel miatt $|\lambda| = 1$, tehát a (6.46) definícióból következik, hogy

$$\mathcal{E}_0 = \lambda e_0, \quad \mathcal{E}_j = \lambda \bar{e}_j, \quad |\lambda| = 1 \quad (6.71)$$

Legyen most $\Omega \equiv \Lambda^T g \Lambda g$ ekkor (2.172)-(2.174) alapján az algebrailag független négy-qubit invariánsok mindegyike zérus és (2.173) miatt $\Omega^4 = 0$. Ezért a (2.186) \mathcal{R}_Λ mátrix nilpotens. A 2.6.3 fejezet értelmében tehát a szeparálható speciális qubittal rendelkező $|\Lambda\rangle$ állapot egy nilpotens pályához tartozik. Ennek a pályának megfelelő stu fekete-lyuk osztályt könnyen beazonosíthatjuk.

Szorítkozzunk a statikus, gömbszimmetrikus extremális¹⁷ megoldásozrtályra melyre $x_0 = 0$ és $e_0 = -\frac{\dot{y}_0}{y_0} = \dot{\phi}$, azaz $\bar{e}_0 = e_0$ és legyen

$$\lambda = -i\sqrt{\frac{Z}{\bar{Z}}} = -ie^{i\alpha} \quad (6.72)$$

¹⁵Lásd az (5.30)-(5.31) definíciókat.

¹⁶ $|\mathbf{Z}\rangle$ qubit jelölésben a (6.52)-ben szereplő nyolc komponensű \mathbf{Z} vektornak felel meg.

¹⁷Mivel nilpotens pályákra minden négy-qubit invariáns eltűnik, ezért speciálisan $I_1 = 0$ is fennáll. Ez pedig (6.49) miatt extremális megoldásokra (fényszerű geodetikusok) vezet.

ahol α a centrális töltés fázisa. Ekkor a (6.37)-(6.38), (6.40) definíciók felhasználásával könnyen belátható, hogy a (6.71) szeparabilitási feltételek pontosan az (5.141) elsőrendű BPS mozgásegyenleteket szolgáltatják ($G_N = 1$). Megjegyezzük, hogy szeparabilitási feltételünket a

$$\Lambda_{i_3 i_2 i_1 i_0} \epsilon^{i_0} = 0, \quad \epsilon^{a_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad (6.73)$$

alakba is írhatjuk, mely a nemtriviális ϵ^{i_0} Killing spinor létezésének szokásos feltétele [BMP10, CRR11]. Ez a felismerés az 5.6.5 fejezet eredményei alapján állapotunk szeparabilitását összekapcsolja a szuperszimmetriával.

6.4.4. Nem-BPS megoldások eltűnő centrális töltéssel, szeparábilis eset Az előző fejezetben elmondottakat könnyű általánosítani arra az esetre amikor a fennmaradó (i_1, i_2, i_3 -vel indexelt) qubitok szeparálhatóságát kötjük ki. Például az i_3 -val indexelt qubit esetén a szeparabilitás kritériuma

$$\mathcal{E}_0 = -\lambda e_3, \quad \bar{\mathcal{E}}_1 = -\lambda \bar{e}_2, \quad \bar{\mathcal{E}}_2 = -\lambda \bar{e}_2, \quad \mathcal{E}_3 = -\lambda \bar{e}_0 \quad (6.74)$$

lesz. Amennyiben ezúttal a

$$\lambda = -i \sqrt{\frac{Z_3}{\bar{Z}_3}} \quad (6.75)$$

választással élünk ahol Z_3 az (5.241)-ben definiált hamis szuperpotenciálok egyike akkor az (5.141) BPS egyenletekhez hasonló

$$\dot{U} = -e^U |Z_3|, \quad \dot{z}^j = -2e^U G^{j\bar{k}} \partial_{\bar{k}} |Z_3|. \quad (6.76)$$

egyenleteket kapjuk. Ezek pedig pontosan az eltűnő centrális töltéssel rendelkező nem-BPS attraktorok elsőrendű egyenletei [BCP⁺09, BMP10]. Természetesen ez a megoldáosztály is egy nilpotens pályának felel meg. A fennmaradó qubitok szeparálhatóságának problémája, a megfelelő indexek ciklikus permutálásával, hasonló alakban fogalmazható meg.

6.4.5. Nem-BPS megoldások, összefonódott eset Az előző extrémális esetekből világos, hogy az $I_1 = 0$ -ból következő

$$\sum_{\alpha=0}^3 \bar{\mathcal{E}}_\alpha \mathcal{E}_\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 \bar{e}_\alpha e_\alpha \quad (6.77)$$

extremalitási feltételt sokféleképpen kielégíthetjük. Statikus megoldásokra $\bar{e}_0 = e_0$, BPS megoldásokra $\mathcal{E}_\alpha = \lambda \bar{e}_\alpha$ ahol λ egységnyi abszolútértékű fázisfaktor. Ez azt mutatja, hogy \mathcal{E}_α egy fázisfaktorokat tartalmazó diagonális $U(4)$ mátrixon keresztül áll kapcsolatban \bar{e}_α -val. Az előző alfejezet nem-BPS megoldására a megfelelő $U(4)$ mátrix a

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\bar{\lambda} & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda} & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \quad (6.78)$$

kifejezésből olvasható le ahol λ -t (6.75) definiálja.

A BPS eset, és a eltűnő centrális töltéssel rendelkező három nem-BPS eset az $i_3 i_2 i_1 i_0$ -val indexelt valamennyi qubit szeparálhatóságának problémáját felöleli. Ezen esetek mindegyikében a megfelelő $U(4)$ mátrix szerkezete igen egyszerű: a szuperpotenciál illetve a hamis szuperpotenciálok fázisaival kapcsolatos (6.75)-szerű fázisfaktorokat tartalmaz. A szeparabilitást kifejező egyenletek azzal kapcsolatosak, hogy a (6.46) mátrix bizonyos sorai vagy oszlopai egymás λ szorosai.

Az STU modell olyan fekete lyuk megoldásaira melyeknek megfelelő (6.46) mátrix által definiált $|\Lambda\rangle$ állapot egyik qubitje sem szeparálható jó példa az 5.7.2 fejezetben tárgyalt nem-BPS alapmegoldás. Megmutatható [8], hogy ebben az esetben

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (6.79)$$

Figyeljük meg, hogy a megjelenő 4×4 -es mátrix ismét $U(4)$ eleme s így az extremalitást kifejező (6.77) feltétel ismét teljesül. Az algebrailag független invariánsok ezúttal is zérusok, tehát a megfelelő állapot megint nilpotens. A fontos újdonság az előző esetekhez képest az, hogy ezúttal az $i_3 i_2 i_1 i_0$ -val indexelt qubitok egyike sem szeparálható. Ez legegyszerűbben onnan látható, hogy a megfelelő qubit szeparálhatóságával kapcsolatos sorok illetve oszlopok nem arányosak egymással.

6.5. Négy-qubit SLOCC osztályok és fekete lyuk megoldások

Az előző fejezetekben láttuk, hogy az STU modell négydimenziós stacionárius fekete lyuk megoldásainak osztályozásának problémája kapcsolatba hozható egy háromdimenziós gravitációhoz csatolt \mathcal{M}_3 modulusterű nemlineáris szigma modell geodetikusainak osztályozásának problémájával. Ezt az érdekes kapcsolatot matematikai szempontból ezidáig csak vázlatosan érintettük. Ennek a fejezetnek a célja a kapcsolat precízebb tárgyalása.

A kiindulási pont a fekete lyuk megoldásokat reprezentáló (6.58) geodetikus egyenlet és ennek (6.59) megoldása. A geodetikus egyenletek Lax-pár alakba írhatók és Liouville integrálhatók [CRTR10]. Ebben a geodetikusok vizsgálatán alapuló háromdimenziós képben az eredeti modell négydimenziós $G_4 = SL(2, \mathbb{R})^{\times 3}$ dualitási szimmetriája az \mathcal{M}_3 modulustéren ható $G_3 = SO(4, 4)$ dualitási szimmetriában jelenik meg. Az új képben a fekete lyuk megoldások osztályai a pseudo-Riemann geometriával rendelkező \mathcal{M}_3 modulustér G_3 általi *pályái*. A pályákat adott kezdőpontból adott sebességgel indított geodetikusok reprezentálják. A geodetikusok sebességvektorát a (6.60) által adott, az értékeit a G_3 Lie-algebrájában felvevő Q megmaradó töltések határozzák meg. A geodetikus sebességparaméter $v^2 = \text{Tr}(Q^2)$ mely (6.24), (6.49) és (6.60) miatt egy négy-qubit invariáns alakjában áll elő. Amennyiben v^2 negatív (időszerű geodetikusok) a megfelelő fekete lyuk megoldások nem-extremálisak, amennyiben v^2 zérus (fényyszerű geodetikusok) a fekete lyuk megoldások extremálisak¹⁸. Megmutatható [BNS09, BMP10, BCP⁺09] hogy

$$Q^3 = v^2 Q \quad (6.80)$$

tehát a fényyszerű geodetikusokkal reprezentált extremális megoldásokra Q nilpotens és a nilpotencia foka három. Ebből következik, hogy amennyiben a (6.59) egyenletben $\mathcal{L}(0) = \mathbb{I}$ választással élünk¹⁹, a 6.4.1 alfejezetben specifikált extremális megoldásoosztályra kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}(\varrho) = \mathbb{I} + \varrho Q + \frac{1}{2} \varrho^2 Q^2 \quad (6.81)$$

Ebben az esetben a geodetikusokat a Q mátrix egyértelműen jellemzi. Mivel $Q \in \mathfrak{so}(4, 4)$, ezért a G_3 dualitási csoport $Q \mapsto gQg^{-1}$ alakú adjungált hatása az $\mathfrak{so}(4, 4)$ Lie-algebrában

¹⁸A térszerű eset fizikai szempontból értelmezhetetlen szituációra vezet. A térszerű esettel kapcsolatos fekete lyuk megoldások ugyanis csupasz szingularitásokat tartalmaznak. Az időszerű geodetikusokkal kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy amennyiben a modulustér csak az U gyűrési faktorból áll akkor bármely nem extremális statikus gömbszimmetrikus fekete lyuk megoldás G_3 ekvivalens a Schwarzschild megoldással [BMG88].

¹⁹Mivel G_3 hatása az \mathcal{M}_3 modulus téren tranzitív elegendő a modulustér fenti feltétellel definiált "origójában" vizsgálni.

pályákat határoz meg melyek egy-egy értelmű kapcsolatban vannak az STU modell fekete lyuk megoldásaival.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy meglepő módon ezek a *valós* G_3 dualitási csoporttal kapcsolatos extrémális megoldásokat reprezentáló *nilpotens* pályák egy-egy értelmű kapcsolatba hozhatók a *nilpotens komplex* $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ négy-qubit pályákkal. Ennek következtében az STU modell extrémális megoldásai egy-egyértelmű módon megfeleltethetők a nilpotens négy-qubit SLOCC összefonódottsági osztályoknak [BDD⁺10].

A fenti megfelelés alapja a Kostant-Sekiguchi megfelelés [Sek87]. Legyen $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ a $G_{\mathbb{C}}$ komplex Lie-csoport Lie-algebrája. Legyen továbbá $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ a $G_{\mathbb{C}}$ Lie-csoport nem-kompakt valós $G_{\mathbb{R}}$ alakjának Lie-algebrája, illetve $H_{\mathbb{R}}$ a $G_{\mathbb{R}}$ csoport maximális kompakt részcsoporthja. Legyen továbbá

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{m}_{\mathbb{R}} \quad (6.82)$$

a $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ megfelelő Cartan dekompozíciója. Tekintsük a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ Lie-algebrán a $G_{\mathbb{C}}$ adjungált hatására vett \mathfrak{N} nilpotens pályáinak varietását! Ekkor a Kostant-Sekiguchi megfelelés alapján

$$\mathcal{O}_{G_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) \simeq \mathcal{O}_{H_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}) \quad (6.83)$$

azaz állítás szerint a bal és jobb oldalon megjelenő \mathcal{O}_G G pályák diffeomorfak. Legyen most

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(8)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2)_{\mathbb{C}}^{\oplus 4} \oplus (2, 2, 2, 2) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} \quad (6.84)$$

a (2.178)-ben már tárgyalt Cartan dekompozíció. Legyen $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = SO_0(4, 4)$ és $H_{\mathbb{R}}^* = SO(2, 2) \times SO(2, 2)$ a $H_{\mathbb{R}}$ maximális kompakt részcsoporth nem-kompakt verziója. Ekkor megmutatható [BMP10], hogy a Kostant-Sekiguchi megfelelés nem-kompakt $H_{\mathbb{R}}^*$ esetében is érvényes. A (6.83) megfelelés bal oldalán már tudjuk az extrémális fekete lyuk megoldásokkal kapcsolatos nilpotens pályák állnak. A jobb oldalon álló négy-qubit rendszereknél megismert (2.187) csoporthatás nilpotens pályái pedig a nilpotens összefonódottsági osztályokat adják. A 2.6.3 fejezet alapján tudjuk, hogy az $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ csoporthatással szemben nilpotens pályák egyúttal nilpotens SLOCC pályák is²⁰. Tehát a négy-qubit nilpotens SLOCC összefonódottsági osztályok és a 6.4.1 fejezetben definiált gyengén extrémális fekete lyuk megoldások dualitási osztályai között egy-egyértelmű megfelelés van.

A gyengén extrémális fekete lyukak osztályának fogalma azonban egy kis további tisztázásra szorul. Egy gyengén extrémális megoldás nem mindig síma (reguláris) extrémális megoldás. Kiderült azonban [GNPW06], hogy a regularitás Q nilpotencia indexének fokával kapcsolatos. Az STU modellre regularitás szükséges feltétele épp a jólismert $Q^3 = 0$ feltétel [BNS09]. Amennyiben Q a Cartan dekompozíció \mathfrak{m} alterében helyezkedik el ez a feltétel a (6.60) képlet miatt akkor következik be ha $V = \mathbb{I}$ ami annak felel meg, hogy a megoldás aszimptotikusan lapos.

Fontos azt is látni, hogy amíg az STU fekete lyuk megoldások ekvivalenciaosztályait definiáló dualitási csoportok *valósak* addig a négy-qubit állapotok SLOCC ekvivalenciáját definiáló csoportok *komplexek*. Ennek ellenére az extrémális esetben a fekete lyukak osztályai és a nilpotens összefonódottsági osztályok között egy-egyértelmű megfelelés van. A 2.6.3 fejezetben tárgyalt nilpotens négy-qubit összefonódottsági osztályok és a megfelelő fekete lyuk megoldások közötti részletes megfelelést Michael Duff és csoportja dolgozta ki [BDD⁺10, BDMR11].

A gyengén extrémális megoldások fenti osztályai egycentrum megoldások. Ismeretes azonban, hogy az STU model stacionárius megoldási között fontos szerepet játszanak a *többcentrum megoldások*. Ezen megoldások diszkussziója nem tárgya ezen dolgozatnak. Itt csak annyit jegyezzük meg, hogy ezen megoldások és a megfelelő nilpotens pályák beazonosítása is elvégezhető. Az ezzel kapcsolatos eredményeket és a többcentrum STU megoldásokkal kapcsolatos irodalmat illetően lásd a [BDL12] összefoglaló cikket.

²⁰Emlékeztetünk arra, hogy a teljes SLOCC csoport $GL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$.

A fekete lyuk megoldások és összefonódottsági osztályok közötti fenti kapcsolat kizárólag a *nilpotens* négy-qubit állapotokra vonatkozik. A 2.6.3 fejezetből azonban tudjuk, hogy egy tetszőleges négy qubit állapot egy féligegyszerű és egy nilpotens rész összegére bontható. Tudjuk, hogy az $SL(2, \mathbb{C})^{\times 4}$ pályák 17 családba sorolhatók. Ebből az egyik családot a féligegyszerű pályák családja adja melyet a (2.192)-ben bevezetett négy komplex szám jellemez. A fennmaradó 16 családból 10 család ezekből a paraméterekből hármát tartalmaz. Ha az összes komplex paramétert zérusnak választjuk akkor a már ismert nilpotens pályák 16 családját kapjuk vissza. Amennyiben a permutációs csoporttal kibővített általánosított (2.200)-n alapuló SLOCC ekvivalenciát tekintjük ezen osztályok 17 helyett már csak 9 családba szerveződnek. Jóllehet a féligegyszerű állapotok nyilván időszerű geodetikusokkal kapcsolatos nem-extremális fekete lyuk megoldásokat írnak le az összefonódottsági osztályokkal való explicit kapcsolat nem ismert.

A (2.192) alakú négyparaméteres állapotok családja a négy-qubit állapottérben sűrűn helyezkedik el. Fizikai szempontból ez annak felel meg, hogy a megoldások modulusterében a nem extremális STU fekete lyukak sűrűn helyezkednek el. Tehát az általunk részletesen vizsgált extremális megoldások a modulustérben csupán nullmértékű halmazt alkotnak. A féligegyszerű megoldások vizsgálatában a legfrissebb eredmény a legáltalánosabb STU fekete lyuk megoldás generáló megoldás segítségével történő explicit felírása [CC14b, CC14a]. Sajnos a fenti eredmények meglehetősen bonyolult parametrizációja a FLYQM-ben történő felhasználását nagyon megnehezíti. Igen fontos eredmény azonban az általános STU fekete-lyuk entrópiaformula felírása. Mint tudjuk az extremális esetben ez a formula Cayley hiperdeterminánsával az (5.240) alakban fejezhető ki. Az általános nem extremális eset entrópiaformulája egy Cardy-formula szerű alakban áll elő [CC14a]. A formula lelkét képező úgynevezett F-invariáns szerkezetének FLYQM szellemében történő feltárásában PhD hallgatóm Sárosi Gábor ért el kiemelkedő eredményeket [S16, CL15].

A fejezetet néhány történeti megjegyzéssel zárjuk. Az STU modell és a négy-qubit rendszerek (6.84) Cartan dekompozíció alapján alapuló kapcsolatára először a 2007-es [5] dolgozat mutatott rá. Az STU modell és az időszerű dimenzióredukció kontextusában a négy-qubit összefonódott rendszerekkel való analógia lehetősége Bergshoeff et.al. 2009-es cikkének 5.52-es képlete kapcsán bukkan fel először [BCP⁺09]. A pseudo-Riemann \mathcal{M}_3 modulustér ívelemnégyszetének a kvadratikusan négy-qubit invariánsal történő (6.49) kapcsolata Bossard et.al. munkájának (4.37) egyenletében jelenik meg [BMP10]. Bossard et.al. ezen cikkének Függelékében található a Kostant-Sekiguchi megfelelés és az STU nilpotens pályák extremális fekete lyukakkal való részletesen kidolgozott kapcsolata is, jóllehet a négy-qubit összefonódottsággal való kapcsolat említése nélkül. Az utóbbi két munka motiválta a [8] dolgozatot, mely az STU modellben ezidáig használt három-qubites szemlélet helyett egy négy-qubit összefonódottságon alapuló szemléletet vezetett be. Ugyancsak ez a dolgozat hívja fel a figyelmet arra, hogy a nem-extremális illetve extremális STU fekete lyuk megoldások féligegyszerű illetve nilpotens négy-qubit SLOCC osztályokkal állnak kapcsolatban. A négy-qubit nilpotens állapotok és az extremális fekete lyukak közötti részletes kapcsolat kidolgozása Duff-csoportjának érdeme [BDD⁺10]. Ez a munka meglehetősen nagy port kavart fel²¹. Természetesen az a tény, hogy a húrelméleti fekete lyuk megoldások kapcsán használt matematikai eljárások a négy-qubit összefonódottsági mintázatok elegáns osztályozásában hasznosnak bizonyultak, a húrelméletet mint tudományos teóriát még nem igazolja.

²¹A Physical Review Letters-ben publikált dolgozat hep-th archívumban megjelent előzetese (arXiv:1005.4915) 10 blog linket tartalmaz. A túlzó szalagcímekből csak néhány: "A kutatók felfedezték hogyan lehet tesztelni a tesztelhetetlennek tartott húrelméletet"(Imperial College London News), "A húrelmélet végre csinál valami hasznosat"(Science), "Húrelmélet összefonva" (Science News).

7. FEJEZET

Hitchin funkcionálok és összefonódottsági mértékek

7.1. Motiváció

Az előző fejezetekben a tíz téridődimenziós IIB húrelméletek $X \equiv T^2 \times T^2 \times T^2$ -re történő toroidális kompaktifikációját tekintve olyan effektív négy dimenziós szupergravitációelméletet kaptunk (STU-modell) melyre a téridő geometriája összefonódott az extra dimenziók térfogatőrző deformációinak geometriájával. Ebben az igen speciális esetben az extra dimenziók deformációit egy alkalmasan választott (Hodge diagonális) bázisban felírt $\Gamma \in H^3(X, \mathbb{C})$ kohomológia elemhez asszociált $|\Gamma\rangle$ hátom-qubit állapottal vettük figyelembe. Az effektív elmélet további (időszerű) dimenzióredukciója után a $|\Gamma\rangle$ csavarodási számaiba kódolt összefonódottságot egy negyedik (Ehlers $SL(2, \mathbb{R})$ csoporttal kapcsolatos) qubittal egészítettük ki. A negyedik qubit $|\Gamma\rangle$ -hoz való viszonyát¹ implicit módon a (6.47) $|\Lambda\rangle$ állapot fejezte ki.

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy az összefonódottsággal kapcsolatos struktúrák hogyan jelennek meg abban az esetben amikor az X sokaság már lehet egy nem faktorizálódó tórusz (T^6) sőt egy hat dimenziós Calabi-Yau sokaság is. Az Ehlers-qubit extra összefonódottságával kapcsolatos komplikációkkal ebben a dolgozatban nem foglalkozunk.

7.2. Calabi-Yau sokaságok

Ebben a fejezetben vázlatosan áttekintjük a Calabi-Yau (CY) sokaságokkal kapcsolatos számunkra releváns ismereteket [JHS07, CdIO91]. Mivel az itt tárgyalásra kerülő geometriai struktúrák a toroidális geometria kapcsán már felbukkantak, az Olvasónak javasoljuk az ebben a fejezetben elmondott anyag tételes összevetését a 5.3. fejezetben tárgyaltakkal.

A CY sokaságok olyan n dimenziós komplex Kähler sokaságok melyek első Chern osztálya eltűnik: $c_1 = [\mathcal{R}]/2\pi = 0$ ahol $[\mathcal{R}]$ a Kähler metrikából számolt Ricci-forma kohomológia osztálya. Calabi sejtése nyomán Yau bebizonyította, hogy bármely kompakt Kähler sokaságra melyre $c_1 = 0$ megadható olyan Kähler metrika mely $SU(n)$ holonómiával rendelkezik. Megmutatható, hogy egy $SU(n)$ holonómiával rendelkező sokaság Ricci lapos² azaz $\mathcal{R} = 0$. Mindezek eredményeképp belátható, hogy az $SU(n)$ holonómiával rendelkező sokaságok pontosan azok a Kähler sokaságok melyekre $c_1 = 0$. Egy számunkra alapvető jelentőséggel bíró tétel szerint egy kompakt Kähler sokaságra $c_1 = 0$ akkor és csak akkor ha a sokaságon létezik egy seholsem eltűnő

$$\Omega_0 = f(z^1, z^2, \dots, z^n) dz^1 \wedge dz^2 \wedge \dots \wedge dz^n \quad (7.1)$$

holomorf n -forma.

¹Nyilván nem eltűnő ($k \neq 0$) NUT töltés esetén a $|\Gamma\rangle$ helyett formálisan a (6.68)-ban definiált $|\Gamma^{(k)}\rangle$ értendő. Azonban ennek az állapotnak az (extra dimenziók segítségével történő matematikai szempontból precíz) értelmezése a Szerző számára nem ismert.

² Ez a tétel csak kompakt sokaságokra érvényes. Ahhoz, hogy a tétel nemkompakt esetre is érvényes legyen speciális határfeltételeket kell kikötnünk.

Kähler sokaságokra a kohomológiát jellemző Betti számokat dekomponálhatjuk az úgynevezett Hodge számok szerint: $b_k = \sum_{p=0}^k h^{p,k-p}$. Mivel a Kähler sokaságok rendelkeznek metrikával ezért van értelme az egyes kohomológia osztályok harmónikus reprezentánsairól beszélni³. Ebből fakadóan a $h^{p,k-p}$ számok az egyes kohomológia osztályokba eső lineárisan független harmónikus p -formák számát adják meg. CY sokaságokra a $h^{p,q}$ számok összessége a sokaságot jellemző úgynevezett *Hodge gyémánt*. CY sokaságokra a Hodge-gyémánt speciális szerkezetű. A dolgozatban bennünket csak az $n = 3$ -as eset érdekel. Ebben az esetben kiderül, hogy a CY "három"-sokaságokat csak két nemtriviális Hodge szám jellemzi: $h^{1,1}$ és $h^{2,1}$. A fennmaradó Hodge számokra $h^{0,0} = h^{3,0} = h^{0,3} = h^{3,3} = 1$ a többi Hodge szám zérus.

Egy CY sokaságot a nemtriviális Hodge számok lerögzítése nem jellemez egyértelműen. Rögzített Hodge számok esetén folytonosan változtatható paraméterekkel jellemzett CY sokaságok egész családja létezik. Ezek a folytonosan változtatható paraméterek a tórusz esetből már jól ismert, a CY sokaság alakjával és méretével kapcsolatos, *modulus paraméterek*. Ezek a *deformációs* paraméterek a CY sokaság modulus terének lokális koordinátáit adják⁴. A CY sokaságok deformációival kapcsolatos modulustér szerkezetének feltárásához a Ricci laposság feltételének megőrzéséből indulnak ki: a metrika $g \mapsto g + \delta g$ alakú variálása során megkövetelik, hogy $\mathcal{R}(g) = \mathcal{R}(g + \delta g) = 0$. Ezek után megfelelő mértékválasztással eliminálják a metrika azon variációit melyeket általános koordinátatranszformációk számlájára írhatunk. Az $n = 3$ -as esetben a fennmaradó metrikus deformációk két fajtáját különböztetjük meg a

$$\delta g_{m\bar{k}} dz^m \wedge d\bar{z}^{\bar{k}} \quad (7.2)$$

és a

$$(\Omega_0)_{mkl} g^{l\bar{r}} \delta g_{\bar{r}\bar{s}} dz^m \wedge dz^k \wedge d\bar{z}^{\bar{s}} \quad (7.3)$$

típusú deformációkat ahol $k, l, m, r, s = 1, 2, 3$. A (7.3) típusú deformációk a CY sokaság komplex struktúrájának deformációit adják. A tórusz esetben ezek felelnek meg a tórusz térfogatörző deformációinak. A komplex struktúra modulusok száma: $h^{2,1}$. Ennek megfelelően a modulustér lokálisan a τ^a $a = 1, 2, \dots, h^{2,1}$ koordinátákkal paraméterezhető. A Ricci lapos g metrika változásnak a $H^{2,1}(X, \mathbb{C})$ kohomológia osztályok bázisvektoraival való explicit kapcsolata az alábbi alakba írható [CdIO91]

$$\chi_a = \frac{1}{2} (\chi_a)_{kl\bar{m}} dz^k \wedge dz^l \wedge d\bar{z}^{\bar{m}}, \quad (\chi_a)_{kl\bar{m}} = -\frac{1}{2} (\Omega_0)_{kl} \frac{\partial g_{\bar{m}s}}{\partial \tau^a} \quad (7.4)$$

A (7.2) típusú deformációk a CY sokaság Kähler struktúrájának deformációi. A tórusz esetben ezek a tórusz térfogati fluktuációival kapcsolatos deformációknak felelnek meg. A húrelméletek mindegyikében szerepel az úgynevezett B-tér. Ez Kalb-Ramond típusú olyan bozonikus tér melyek a dilaton és a graviton mellett a húr zéró módusaival kapcsolatos terek állandó szereplője. Kompaktifikáció során ez a tér a CY sokaságon egy $B_{m\bar{k}}$ index szerkezetű tér megjelenésére vezet. A $B_{m\bar{k}}$ teret a Kähler metrika hasonló $(g_{m\bar{k}})$ index szerkezetű mátrixával kombinálva a komplexifikált $H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ Kähler kohomológia osztályt kapjuk. A Kähler modulusok száma: $h^{1,1}$.

Az X CY sokaság $\mathcal{M}(X)$ modulusterén egy természetes metrikát definiálhatunk (Weil-Petersson metrika). Ez a fentiek értelmében két jól elkülöníthető tagból áll annak megfelelően, hogy (lokálisan) a modulustér egy Kähler $(\mathcal{M}^{1,1}(X))$ és egy komplex struktúra $(\mathcal{M}^{2,1}(X))$

³A H^p kohomológia osztály harmónikus reprezentánsai azok a p -formák melyekre $\Delta_p \omega = 0$ ahol Δ_p a p -formákon ható Laplace-operátor.

⁴Létezhetnek olyan rögzített Hodge számokkal rendelkező CY sokaságok is melyek topológiai szempontból inekvivalensek azaz nem homeomorfak. A Hodge számok tehát a CY sokaságok topológiáját nem jellemzik egyértelműen.

modulustérre faktorizálódik

$$ds^2 = \frac{1}{2V} \int g^{k\bar{l}} g^{r\bar{s}} [\delta g_{kr} \delta g_{\bar{l}\bar{s}} + (\delta g_{k\bar{s}} \delta g_{r\bar{l}} - \delta B_{k\bar{s}} \delta B_{r\bar{l}})] \sqrt{g} d^6 x \quad (7.5)$$

ahol V a CY sokaság térfogata. A továbbiakban részletesen kizárólag a komplex struktúra deformációkkal kapcsolatos $\mathcal{M}^{2,1}(X)$ modulustér geometriáját tárgyaljuk. $\mathcal{M}^{1,1}(X)$ geometriáját illetően lásd Candelas és de la Ossa munkáját [CdIO91].

Az $\mathcal{M}^{2,1}(X)$ modulustér geometriájának *lokális* jellemzéséhez lokális koordinátákat vezetünk be. Legyen (A^I, B_I) a $H_3(X, \mathbb{Z})$ egy kanonikus bázisa, és (α_I, β^I) a duális $H^3(X, \mathbb{Z})$ -beli bázis. Ez azt jelenti, hogy

$$\int_{A^I} \alpha_J = \delta_J^I, \quad \int_{B_I} \beta^J = -\delta_I^J \quad (7.6)$$

a többi kombináció zérus. Tekintsük ekkor az Ω_0 holomorf háromforma

$$X^I = \int_{A^I} \Omega_0, \quad F^J = \int_{B_J} \Omega_0 \quad (7.7)$$

periódusait. Megmutatható [CdIO91], hogy lokálisan a modulustér szerkezetét az X^I periódusok határozzák meg. Ebből következik, hogy: $F^J(X)$ s így Ω_0 az

$$\Omega_0 = X^I \alpha_I - F_I(X) \beta^I \quad (7.8)$$

alakba írható. Mivel az Ω_0 csak egy nemzérus komplex konstans erejéig meghatározott ezért az $X^I, I = 0, 1, 2, \dots, h^{2,1}$ lokális koordináták $\mathcal{M}^{2,1}(X)$ homogén projektív koordinátáiként foghatók fel. *Inhomogén* koordinátákat a

$$\tau^a = \frac{X^a}{X^0} \quad (7.9)$$

összefüggéssel definiálunk.

A komplex struktúra modulustér metrikáját úgy kapjuk meg, hogy a (7.5) kifejezésben csak a szögletes zárójelben álló első tagot tartjuk meg. Mint tudjuk a modulus paraméterek száma $h^{2,1}$ tehát

$$ds_{\mathcal{M}^{2,1}(X)}^2 = 2G_{a\bar{b}} d\tau^a d\bar{\tau}^{\bar{b}} \quad (7.10)$$

ahol $\tau^a, a = 1, 2, \dots, h^{2,1}$ a megfelelő modulus paraméterek. $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ esetén rövid számolás mutatja, hogy ezzel az eljárással az (5.108)-ból ismerős Poincaré metrikát kapjuk. Megmutatható, hogy

$$G_{a\bar{b}} = -\frac{\int_X \chi_a \wedge \bar{\chi}_{\bar{b}}}{\int_X \Omega_0 \wedge \bar{\Omega}_0} = \partial_a \bar{\partial}_{\bar{b}} \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} = -\log(i \int_X \Omega_0 \wedge \bar{\Omega}_0) \quad (7.11)$$

azaz $\mathcal{M}^{2,1}(X)$ is Kähler és \mathcal{K} a megfelelő Kähler potenciál.

Egy további fontos megfigyelés [CdIO91] szerint az Ω_0 holomorf háromforma modulusok szerinti deriváltjai a

$$\partial_a \Omega_0 = k_a \Omega_0 + \chi_a \in H^{3,0} \oplus H^{2,1} \quad (7.12)$$

alakba írhatók. Ennek alapján könnyen belátható, hogy $\chi_a = D_a \Omega_0$ ahol D_a a (5.35)-ben már használt kovariáns deriválás operátora⁵. Mindezek alapján ellenőrizhető, hogy

$$G_{a\bar{b}} = -i \int_X D_a \Omega \wedge \bar{D}_{\bar{b}} \bar{\Omega}, \quad e^{-\mathcal{K}} = i \int_X \Omega_0 \wedge \bar{\Omega}_0 \quad (7.13)$$

⁵ $D_a \Omega_0 = (\partial_a + \partial_a \mathcal{K}) \Omega_0$. $D_a \Omega = e^{\mathcal{K}/2} D_a \Omega_0$, ahol $\Omega = e^{\mathcal{K}/2} \Omega_0$.

ahol (5.15)-hoz hasonlóan $\Omega = e^{\mathcal{K}/2}\Omega_0$. Figyeljük meg, hogy amennyiben lapos kovariáns deriváltakat használunk akkor (7.13)-ból a tórusz esetben használatos (5.40) összefüggéseket kapjuk⁶.

A (7.12) összefüggés miatt igaz, hogy $\int_X \Omega_0 \wedge \partial_I \Omega_0 = 0$ ezért

$$2F_I = \frac{\partial}{\partial X_I}(X^J F_J) \quad (7.14)$$

tehát $F_I(X)$ egy az X^I koordináták homogén másodfokú \mathcal{F} függvényének a gradienseként áll elő azaz

$$F_I(X) = \partial_I \mathcal{F}(X), \quad \mathcal{F}(\lambda X) = \lambda^2 \mathcal{F}(X) \quad (7.15)$$

ahol

$$\mathcal{F}(X) = \frac{1}{2} X^I F_I \quad (7.16)$$

Az \mathcal{F} függvény neve *holomorf prepotenciál*. Könnyen belátható, hogy az STU modellre $\mathcal{F} = X^1 X^2 X^3 / X^0$. Az $X^0 = 1$ mértékválasztással az X^I periódusokra és a velük kapcsolatos kovariáns deriváltakra a jólismert (6.41) összefüggéseket kapjuk. A (7.13) összefüggések másodikát felhasználva a Kähler potenciálra a

$$e^{-\mathcal{K}} = 2\Im(X^I \bar{F}_I) \quad (7.17)$$

összefüggést kapjuk. Ez az STU modellre a szokásos (5.34) $\mathcal{K} = -\log(8y^1 y^2 y^3)$ összefüggésre vezet.

7.3. BPS Calabi-Yau attraktorok

7.3.1. Motiváció A IIB húrelméleti képben tárgyalt Calabi-Yau (CY) BPS fekete lyuk megoldások szerkezete az 5.3-5.5 fejezetekben tárgyalt toroidális BPS fekete lyuk megoldások szerkezetének mintázatát követi. Speciálisan az effektív négy dimenziós hatás továbbra is az (5.103) alakú ahol az (5.106)-(5.108) mennyiségek explicit alakja a CY sokaság geometriájának megfelelően módosul. Tudjuk már, hogy az effektív hatásban megjelenő Abeli-vektorterek a IIB elmélet önduális öt-formájából eredeztethetők melyet az (5.112)-(5.113) alakba írhatunk. Ezekben a képletekben most Γ a CY-sokaság kohomológiájának egy elemét jelenti ahol⁷

$$\Gamma = p^I \alpha_I - q_I \beta^I \quad (7.18)$$

ahol a p^I, q_I csavarodási számokat az effektív négy dimenziós képben ismét elektromos és mágneses töltéseként interpretálhatjuk.

Az 5. fejezetben láttuk, hogy toroidális kompaktifikáció esetén a Γ kohomológia elemet egy igen speciális összefonódott állapotként interpretálhatjuk. Az STU modell esetén $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ ekkor Γ egy három-qubit (lásd (5.27)), T^6 esetén pedig egy hat egyrészecske állapottal rendelkező háromfermion állapot (lásd (5.71)) alakjában állt elő. CY-kompaktifikációk esetén nyilván ezt nem tudjuk megtenni, hiszen ekkor az összefonódott részrendszerekkel kapcsolatos tenzorszorzat illetve antiszimmetrizált tenzorszorzat struktúra hiányzik. Valóban, $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ esetén a három részrendszert azonosíthattuk a három T^2 -vel, $X = T^6$ esetén pedig $h^{3,0} = h^{0,3} = 1$ és $h^{1,2} = h^{2,1} = 9$ miatt $H^3(X, \mathbb{C})$ dimenziója és $\wedge^3 T^* X$ egyaránt 20 ezért

$$\Gamma = p^I \alpha_I - q_I \beta^I = \frac{1}{3!} \gamma_{ijk} f^i \wedge f^j \wedge f^k \quad (7.19)$$

⁶ Igazából az (5.40) összefüggések és a (7.13) képletek lapos kovariáns deriváltas kifejezései egy előjelben különböznek. Az ok: kényelmi okokból tórusz esetén mi az X sokaság térfogatelemére az (5.9) konvenciót használtuk ami egy előjelben különbözik a megszokottól.

⁷Vessük össze ezt a definíciót a (5.49) definícióval. Láthatóan a (5.49) képletben használt q_I csavarodási számok a mostaniak negatívjai. Ezt a választást a CY sokaságok elméletében használatos szimplektikus struktúrát kihangsúlyozó konvenciókkal való összhang indokolja.

ahol mindkét kifejtés egyaránt 20 tagból áll⁸. CY sokaságokra azonban általában $2h^{2,1} + 2 \neq 20$ s így Γ összefonódottság elméleti interpretációja nem lehetséges. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ennek ellenére ebben a sokkal általánosabb CY kontextusban a BPS attraktoroknak mégis létezik összefonódottság elméleti interpretációja.

7.3.2. Szimplektikus formalizmus A CY BPS attraktorok leírására Bates és Denef elegáns formalizmusát használjuk [BD11]. Tekintsük a CY sokaság harmonikus három formáinak $2h^{2,1} + 2$ dimenziós V komplex vektorterét: $V = H^3(X, \mathbb{C})$. Legyen V ellátva egy $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$ szimplektikus formával oly módon, hogy az $E_A = (\alpha^I, \beta_I)$ kanonikus bázisvektorokra ahol $A, B = 1, 2, \dots, 2h^{2,1} + 2$ teljesül, hogy

$$\langle E_A, E_B \rangle = \int_X E_A \wedge E_B = J_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_I^J \\ -\delta^K_L & 0 \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

ahol⁹ $I, J, K, L = 0, 1, \dots, h^{2,1}$. Ekkor

$$\Gamma = \Gamma^A E_A, \quad \Gamma_A = \langle E_A, \Gamma \rangle, \quad \Gamma^A = J^{AB} \Gamma_B \quad (7.21)$$

ahol J^{AB} a J_{AB} inverze. Ezekkel a jelölésekkel $\Gamma^A = (p^I, -q_J)$.

A CY sokaságot jellemző Ω_0 holomorf háromforma az $\mathcal{M}^{2,1}(X)$ modulustér $\tilde{\mathcal{M}}^{2,1}(X)$ fedőterén¹⁰ értelmezett egyértékű holomorf V -értékű függvény. Ekkor

$$\Omega_0 = \Omega_0^A(\tau) E_A, \quad \Omega_A = \langle E_A, \Omega_0 \rangle, \quad \Omega_0^A = J^{AB} \Omega_{0B} \quad (7.22)$$

ahol $\Omega_0^A = (X^I, -F_J)$. Célszerű még bevezetni az alábbi mennyiségeket

$$\Omega = e^{\mathcal{K}/2} \Omega_0, \quad Z_A = e^{\mathcal{K}/2} X_A \quad (7.23)$$

ezek a mennyiségek nyilván már nem holomorf módon függenek a modulusoktól hiszen

$$\mathcal{K}(\tau, \bar{\tau}) = -\log i \langle \Omega_0, \bar{\Omega}_0 \rangle = -\log(i \bar{X}_A J^{AB} X_B) \quad (7.24)$$

Érdeemes még megjegyezni, hogy a

$$\langle \Omega, \bar{\Omega} \rangle = -i, \quad \langle D_a \Omega, \bar{D}_{\bar{b}} \bar{\Omega} \rangle = i G_{a\bar{b}}, \quad \langle \Omega, D_a \Omega \rangle = \langle \bar{\Omega}, D_{\bar{a}} \bar{\Omega} \rangle = 0 \quad (7.25)$$

relációk a szimplektikus formalizmusban a három-qubit formalizmus (5.46) bázisvektoraira vonatkozó ortogonalitási relációinak felelnek meg.

A szimplektikus formalizmusban a 3-bránok CY homológia ciklusokra történő csavarodási konfigurációit leíró (5.115) tag az $\int_{\mathcal{P}} \langle \Gamma, A \rangle$ alakba írható ahol a definíciókat illetően lásd az (5.96), (5.100) képleteket. Továbbá az (5.116) Dirac-Born-Infeld tag jelentése most is a CY homológia ciklusokra csavarodott bránok térfogatával kapcsolatos. Amennyiben az (5.118) és (5.123) feltételek teljesülnek akkor az adott homológia osztályon belül olyan szuperszimmetrikus ciklusok (speciális Lagrange-féle részsokaságok) léteznek melyekre a 3-bránok térfogata minimális. Ezzel a minimális térfogattal kapcsolatos (5.124) tag az $\int_{\mathcal{P}} |Z(\Gamma)| ds$ mennyiséggel lesz arányos ahol

$$Z(\Gamma) = \langle \Gamma, \Omega \rangle = \Gamma^A Z_A \quad (7.26)$$

Mint tudjuk ez a mennyiség a IIB elmélet $N = 2$ szuperszimmetriájának centrális töltésével kapcsolatos, s mely az (5.220) reláción keresztül a BPS állapotok tömegét adja.

Végezetül az önduális öt-formával kapcsolatos (5.128) tag most is a fekete lyuk potenciál megjelenésére vezet. Ezt a mennyiséget felírhatjuk az (5.131) szimplektikus alakban ahol a

⁸A jelöléseket illetően lásd az (5.68) és az (5.72) képleteket.

⁹Lásd (7.6) illetve az (5.3) összefüggés X -re történő általánosítását.

¹⁰Például: az $X = T^2$ tórusz egy CY sokaság. Ekkor a τ modulus paraméter a tórusz \mathcal{T} Teichmüller terének (komplex felső félsík) koordinátája. Ez a tér a tórusz komplex struktúra terének ($\mathcal{M} = \mathcal{T}/PSL(2, \mathbb{Z})$ = "moduláris tartomány") fedőtere. Az $\Omega_0(\tau) = dz = du + \tau dv$ holomorf egy-forma tehát e fedőtéren értelmezett egyértékű holomorf $V = H^1(X, \mathbb{C})$ értékű függvény.

megfelelő $\Re\mathcal{N}$ és $\Im\mathcal{N}$ mátrixokat a CY speciális geometria alapján a periódusok függvényében explicit módon megadhatjuk [CDF96]. Fontos azt is megjegyezni, hogy Γ (5.53) alakú, a Hodge diagonális bázisban történő kifejtése a CY esetben is érvényes. Ebben a képből a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ szimplektikus forma helyett a tórusz esetben megismert de CY sokaságra is használható (5.22) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ Hermitikus skalárszorzatot is használhatjuk. Ekkor a fekete lyuk potenciál az (5.130) alakban egy $2h^{2,1} + 2$ dimenziós Hilbert térben helyet foglaló speciális valóssági feltételnek eleget tevő $|\Gamma\rangle$ állapotvektor normanégyszétével fejezhető ki. Ekkor azonban az előző alfejezetben tárgyalt okok miatt $|\Gamma\rangle$ nem rendelkezik nyilvánvalóan értelmezhető összefonódottsággal. Ahhoz, hogy megértsük azt, hogy az összefonódottsággal kapcsolatos struktúrák milyen kontextusban bukkannak mégis fel meg kell vizsgálnunk alaposabban a CY BPS attraktorok általános szerkezetét.

7.3.3. Calabi-Yau attraktorok Az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy amennyiben a CY sokaságra kompaktifikált IIB szupergravitációból származtatott (5.103) effektív hatás statikus, extrémális, gömbszimmetrikus aszimptotikusan Minkowski fekete lyuk megoldásait szeretnénk vizsgálni csupán a toroidális esetből megismert formalizmust kell újragondolnunk. Nevezetesen, a CY esetben az effektív dinamikai rendszert ismét az (5.137) hatás és az (5.136) kényszer fogja leírni. A képletekben a CY sokaság geometriájára vonatkozó adatok a modulustér $G_{a\bar{b}}$ metrikájában és a V_{BH} fekete lyuk potenciál szerkezetében jelennek meg. Az (5.138) képlet miatt a fekete lyuk potenciálban alapvető fontosságú mennyiség a (7.26) centrális töltés abszolútértéke: $|Z(\Gamma)|$. Az (5.140) teljes négyzetté alakításon alapuló trükk segítségével kapott BPS egyenletek ismét az (5.141) alakúak. Az egyenletek analízisét azonban most a toroidális esettel ellentétben célszerű az elegánsabb szimplektikus formalizmusban elvégezni. A toroidális eset (5.163) egyenlete és az (5.46) definíció alapján azonnal látható, hogy a modulusok és a gyűrési faktor radiális függését meghatározó egyenleteket most a

$$2\Im(\bar{C}\Omega) = -H, \quad C = e^{-U} e^{i\alpha} \quad (7.27)$$

kifejezés foglalja össze ahol a megfelelő mennyiségek explicit radiális függését most nem írtuk ki¹¹. Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a BPS attraktorokra a jobb oldalon álló H mennyiségnek (az (5.53) alakú kifejtéseket tartalmazó Hodge diagonális bázisban) csak a $H^{3,0}$ illetve $H^{0,3}$ osztályokba eső részei lesznek zérustól különbözőek. Az STU modell esetén ezek (5.163) alapján pont a megfelelő három-qubit állapot GHZ komponensei voltak.

A (7.27) egyenletből (7.21) és (7.23) felhasználásával kapjuk, hogy

$$2\Im(\bar{C}Z_A) = -J_{AB}H^B, \quad H^B = \frac{\sqrt{G_N}}{r}\Gamma^B + \Gamma'^B \quad (7.28)$$

Ezek az egyenletek $2h^{2,1} + 2$ valós egyenletet adnak melyek adott H^A esetén (adott Γ és Γ' esetén) meghatározzák a $h^{2,1} + 1$ darab *komplex* $C_*(H)$ és $\tau_*^a(H)$ függvényeket¹².

A (7.27) kifejezés bal és jobb oldalát az $\langle \Omega, \cdot \rangle$ és $\langle D_a \Omega, \cdot \rangle$ operációk hatására nézve kiértékelve kapjuk, hogy

$$C_*(H) = H^A Z_A|_{\tau_*(H)}, \quad H^A D_a Z_A|_{\tau_*(H)} = 0 \quad (7.29)$$

ahol felhasználtuk a (7.25) formulákat. A (7.29) összefüggések másodikát az (5.139) típusú identitások alkalmazásával a

$$\partial_a |H^A Z_A|_{\tau_*(H)} = 0 \quad (7.30)$$

alakra hozhatjuk. Itt felhasználtuk azt, hogy a H^A mennyiség modulusfüggetlen¹³.

¹¹ U az (5.142) gyűrési faktor, α a (7.26) centrális töltés fázisa, Ω a (7.23)-ben definiált nem holomorf háromforma, és H az (5.163)-ból ismert harmónikus kombináció. Az egyenlőség jel most azt jelenti, hogy a jobb és baloldalon álló mennyiségek ugyanabba a kohomológia osztályba esnek.

¹²Lásd a (7.23) és (7.9) formulákat.

¹³Ez abból következik, hogy a Γ és Γ' kohomológia elemek modulusfüggetlenek.

Vezessük most be a

$$\Sigma(H) \equiv |C_*(H)|^2 = |H^A Z_A|_{\tau_*(H)}^2 \quad (7.31)$$

mennyiséget! Ez explicit és a $\tau_*(H)$ modulusok által a Z_A mennyiségen keresztül implicit módon is függ az előre rögzített H^A mennyiségektől. Számoljuk ki a $\partial\Sigma(H)/\partial H^A$ parciális deriváltat! A modulusokon keresztül jelenlévő implicit H^A függés (7.30)-nak köszönhetően nem ad járulékot. Az explicit H^A függés tehát a teljes járulékot adja mely így a

$$\frac{\partial\Sigma(H)}{\partial H^A} = 2\Re(\overline{C}_*(H)Z_A|_{\tau_*(H)}) \quad (7.32)$$

alakot ölti. Ehhez vegyük még hozzá a (7.28)-ból adódó

$$-J_{AB}H^B = 2\Im(\overline{C}_*(H)Z_A|_{\tau_*(H)}) \quad (7.33)$$

összefüggést melyeket kombinálva a (7.23) és a (7.9) definíciókkal a modulusokra a

$$\tau_A = \frac{X_A}{X_0} = \frac{\partial_A \Sigma(H) - iJ_{AB}H^B}{\partial_0 \Sigma(H) - iJ_{0B}H^B} \quad (7.34)$$

explicit megoldást adja. A (7.8) összefüggés miatt az $X_A = -(F_I, X^I)$ periódusok s így a τ_A koordináták nem mindegyike független. Az $X^0 = 1$ mértékben a független modulusok

$$\tau^a = \frac{H^a + i\frac{\partial\Sigma(H)}{\partial H_a}}{H^0 + i\frac{\partial\Sigma(H)}{\partial H_0}} \quad (7.35)$$

ahol $a = 1, 2, \dots, h^{2,1}$. A C mennyiség (7.27) kifejezését és a (7.31) képletet alkalmazva a gyűrési faktor és a centrális töltés fázisának explicit alakja is megadható

$$e^{-2U} = \Sigma(H), \quad \tan \alpha = \frac{H^0}{\frac{\partial\Sigma(H)}{\partial H_0}} \quad (7.36)$$

Láthatóan a modulusok, a gyűrési faktor és a centrális töltés fázisa egyetlen alapvető mennyiség a $\Sigma(H)$ függvény segítségével fejezhető ki¹⁴. Könnyen belátható, hogy $\Sigma(H)$ homogén másodfokú függvény¹⁵ azaz $\Sigma(\lambda H) = \lambda^2 \Sigma(H)$. Ebből és az ívelemnégyszet szokásos (5.142) alakjából (7.28) második formulájának kihasználásával következik, hogy a BPS fekete lyuk megoldás eseményhorizontjának területe

$$A = 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} r^2 e^{-2U} = 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \Sigma(\sqrt{G_N} \Gamma / r + \Gamma') = 4\pi G_N \Sigma(\Gamma) \quad (7.37)$$

Tehát a BPS fekete lyuk Bekenstein-Hawking entrópiája

$$S_{BH} = \frac{A}{4G_N} = \pi \Sigma(\Gamma) \quad (7.38)$$

Természetesen (7.26) és (7.29) értelmében $\Sigma(\Gamma) = |Z(\Gamma)_*|^2$ s így CY fekete lyukakra is a toroidális esetből már jólismert (5.150) entrópiaformulát kapjuk.

A most áttekintett [BD11] formalizmus világosan kidomborítja a Σ mennyiség és az S_{BH} entrópia központi jelentőségét. Nevezetesen: amennyiben S_{BH} funkcionális alakja ismert akkor a Σ argumentumában történő $\Gamma \mapsto H$ elfolytatás segítségével a (7.34) és a (7.36) képletek felhasználásával a gyűrési faktor a modulusok és a centrális töltés fázisának explicit funkcionális alakját a *horizonton kívül is* megkaphatjuk. Megjegyezzük, hogy a Σ homogenitását ismételt kihasználva a modulusok és a centrális töltés fázisának $r \rightarrow 0$ limeszben kapott *horizonton felvett* értékeit a (7.34) és (7.36) képletekben történő $H \mapsto \Gamma$ helyettesítéssel kaphatjuk. Ez a

¹⁴Könnyen látható, hogy ez igaz a modulustér \mathcal{K} Kähler potenciáljára és így a $G_{a\bar{b}}$ Kähler metrikájára is.

¹⁵ $H^A \partial_A \Sigma = 2\overline{C}H^A Z_A = 2|H^A Z_A|^2 = 2\Sigma$.

limesz az attraktor mechanizmus ideájának megfelelően független a modulusok $r \rightarrow \infty$ limeszbeli aszimptotikus értékeitől.

A (7.28) egyenletből az $r \rightarrow 0$ limeszben a

$$\Re(\mathcal{C}X_A)_* = \Gamma_A, \quad \mathcal{C} = 2ie^{\mathcal{K}}\overline{W}, \quad W = \Gamma^A X_A \quad (7.39)$$

attraktor egyenletek CY esetre is érvényes explicit alakját kapjuk¹⁶. A $*$ jelölés arra utal, hogy az egyenlet baloldalán a \mathcal{C}_* és X_*^A mennyiségeknek a Γ_A töltésekkel kifejezett a horizonton felvett attraktor értékei jelennek meg. Mivel az X_A koordináták a holomorf háromforma periódusai ezért a fenti mennyiségek az (5.12) Kähler transzformációk hatására az (5.11) szabály következtében az alábbi módon transzformálódnak

$$\mathcal{K}_* \mapsto \mathcal{K}_* - f - \bar{f}, \quad X_*^A \mapsto e^f X_*^A, \quad \mathcal{C}_* \mapsto e^{-f} \mathcal{C}_* \quad (7.40)$$

ahol tekintettel arra, hogy most az attraktor pontban vagyunk az e^f egy nem zérus komplex szám. Írjuk most a (7.31) kifejezés alapján (7.23) felhasználásával a $\Sigma(\Gamma)$ alaplennységet a

$$\Sigma(\Gamma) = (e^{\mathcal{K}} |\Gamma^A X_A|)_* = (e^{\mathcal{K}} |W|^2)_* = \frac{1}{4} (e^{-\mathcal{K}} |\mathcal{C}|^2)_* \quad (7.41)$$

alakba! Ez a formula invariáns a (7.40) Kähler transzformációkra nézve. Megfelelő mérték választással elérhető, hogy $\mathcal{C}' = 1$ és ekkor

$$\Sigma(\Gamma) = \frac{1}{4} e^{-\mathcal{K}'} = \frac{i}{4} \int_X \Omega'_0 \wedge \overline{\Omega}'_0 \quad (7.42)$$

ahol $\Omega'_0 = \mathcal{C}_* \Omega_{0*}$. A (7.39) attraktor egyenlet alapján ez a választás azt jelenti, hogy a CY sokaság az attraktor mechanizmusnak köszönhetően az eseményhorizonton olyan speciális komplex struktúrával rendelkezik melyre nézve a (csak konstans szorzó erejéig specifikált) holomorf háromforma által definiált CY térfogat a fekete lyuk entrópiával arányos. Továbbá (7.39) miatt, ezen választás esetén a holomorf háromforma periódusainak valós része épp a töltéseket adja.

Jóllehet CY sokaságokra S_{BH} egy univerzális mennyiség, azonban funkcionális alakjának explicit meghatározása meglehetősen bonyolult [Shm97]. Az STU modell fontos speciális esetében mint tudjuk S_{BH} -ra a Cayley hiperdeterminánsával kifejezett (5.171) alakot kapjuk. Ezt felhasználva a modulusok radiális függésére a (7.34) formulából visszakapjuk a más módszerekkel számolt (5.185) formulát. A horizonton stabilizált modulus és centrális töltés fázisának értékeit természetesen az ismerős (5.181) és (5.184) formulák szolgáltatják.

S_{BH} meghatározására léteznek mikroszkópikus módszerek is [AS96]. Ezek a makroszkópikus [Shm97] módszerekkel együtt elvileg lehetővé teszik hogy egy az eseményhorizonttal kapcsolatos mennyiség elfolytatásával a teljes horizonton kívüli szupergravitációs megoldást megkonstruáljuk [BD11]. A következő fejezetben megmutatjuk, hogy S_{BH} egy összefonódottsági mértékkel kapcsolatos funkcionál kritikus pontjával kapcsolatos.

7.4. Hitchin funkcionál

7.4.1. A Hitchin invariáns mint összefonódottsági mérték [15]. Tekintsünk egy hat dimenziós zárt irányított X sokaságot és egy *valós* P háromformát! Egy lokális koordinátakörnyezetben írható, hogy

$$P = \frac{1}{3!} P_{i_1 i_2 i_3}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} \in \wedge^3 T^* X \quad (7.43)$$

ahol P -t egy (3.63) alakú *valós* fermionikus állapot x lokális koordinátákkal parametrizált családjának is tekinthetjük. A P háromformából képezhetjük a (3.65) K_P mennyiséget mely a (3.66) szabály lokális verziója szerint transzformálódik. Tekintsük a (3.67)-ből már jólismert

¹⁶ A W mennyiség a (4.53) alakban a Freudenthal rendszereknél már feltűnt. Explicit alakját a toroidális esetre lásd (5.54).

$\mathcal{D}(P) = \text{Tr } K_P^2/6$ mennyiség esetünkre vett általánosítását. Ekkor a $V_H[P]$ Hitchin funkcionált [Hit00] az alábbi képlettel definiáljuk

$$V_H[P] = \int_X \sqrt{|\mathcal{D}(P)|} d^6x \quad (7.44)$$

Figyeljük meg, hogy a funkcionált definiáló mennyiség a (3.70) összefonódottsági mérték négyzetgyökével kapcsolatos.

A $\mathcal{D}(P) \neq 0$ tulajdonsággal rendelkező P formákat a következőkben *nemdegenerált* formáknak fogjuk hívni. Legyen $x \in X$ a sokaság egy tetszőleges pontja és V a hatdimenziós érintőtér ebben a pontban. Ekkor a háromformák¹⁷ tere ebben a pontban a 20 dimenziós $W \equiv \wedge^3 V^*$ tér. Tekintsük a $G \equiv GL(V) = GL(6, \mathbb{R})$ csoport hatását V -n. Ez a hatás W -n a (3.64) SLOCC hatás által adott \mathcal{R} ábrázolást indukálja. Egy $P \in W$ háromformát az x pontban *stabilnak* nevezzünk ha az a G csoport \mathcal{R} ábrázolás szerinti hatására a Zariski topológiában vett *sűrű pályájához* tartozik. Általában a (G, W, \mathcal{R}) hármast *prehomogén vektortér*-nek nevezzük ha a G -nek létezik W -ben sűrű pályája. Egy $P \in \wedge^3 T^*X$ háromformát stabilnak nevezzünk ha a fenti tulajdonság X minden pontjára teljesül. Más szavakkal egy P -forma stabil ha P tetszőleges nyílt környezetében található vele G (SLOCC) ekvivalens formák. A prehomogén vektortereket Sato és Kimura osztályozta [SK77]. Az osztályozásból kiderül, hogy a Hitchin funkcionállal kapcsolatos W vektortér prehomogén amennyiben P nemdegenerált. A valós esetben két sűrű pályánk van aszerint, hogy $\mathcal{D}(P)$ pozitív vagy negatív. A sűrű pályákkal kapcsolatos stabilitás kritériumának köszönhetően a Hitchin funkcionál variációs problémája matematikai szempontból értelmes [Hit00, Hit03].

Idézzük most fel a (3.72) definíciót, és definiáljuk a $\mathcal{D}(P) \neq 0$ tulajdonsággal rendelkező nemdegenerált háromformákra a (3.76) $\hat{P}(P)$ duális háromformát. Ez a duálás mint tudjuk a (4.92) Freudenthal duálás speciális esetének tekinthető és kielégíti a fontos (4.93) relációkat. Ekkor a Hitchin funkcionál a (3.166) összefüggés segítségével a

$$V_H[P] = \frac{1}{2} \int_X P \wedge \hat{P} \quad (7.45)$$

alternatív alakba is írható. A (3.91)-(3.92) dekompozíció kapcsán tárgyaltak értelmében egy nemdegenerált P a $P = (\Omega_+ + \Omega_-)/2$ alakba írható ahol az Ω_{\pm} GHZ-komponensek *teljesen szeparálható* háromformák és $\Omega_{\pm} = P \pm i\hat{P}$. Mindezek ismeretében funkcionálunk új alakja

$$V_H[P] = \frac{i}{4} \int_X \Omega_+ \wedge \Omega_- \quad (7.46)$$

Tekintsük most azt a fontos speciális esetet amikor $\mathcal{D}(P) < 0$. Ekkor amennyiben $\Omega'_0 \equiv \Omega_+$ akkor (3.76) és (3.91) miatt $\Omega_- = \overline{\Omega'_0}$ tehát

$$V_H[P] = \frac{i}{4} \int_X \Omega'_0 \wedge \overline{\Omega'_0} \quad (7.47)$$

Variáljuk most a $V_H[P]$ funkcionált azon P háromformák szerint melyek egy rögzített kohomológia osztályba esnek. Legyen ez a rögzített kohomológia osztály a $\Gamma \in [P] \in H^3(X, \mathbb{R})$ reprezentáns osztálya. Ekkor a (3.109) formulát használva ahol $d\Gamma = 0$ és $\dot{\Gamma} = d\varphi$ kapjuk

$$\delta V_H[\dot{\Gamma}] = - \int_X \hat{\Gamma} \wedge \dot{\Gamma} = - \int_X \hat{\Gamma} \wedge d\varphi \quad (7.48)$$

ebből pedig $\delta V_H[\dot{\Gamma}] = 0$ és $\partial X = 0$ figyelembe vételével a Stokes tétel folyományaként kapjuk, hogy

$$d\hat{\Gamma} = 0 \quad (7.49)$$

¹⁷Valós háromfermion állapotok hat egyrészcseke állapottal.

azaz a duális forma is zárt. Ebből következően az $\Omega'_0 = \Gamma + i\hat{\Gamma}$ komplex szeparálható háromforma is zárt tehát $\Omega'_0 \in H^3(X, \mathbb{C})$.

Emlékeztetünk most arra, hogy a K_P mennyiség egy olyan tenzormezőt definiál X -en mely teljesíti a (3.99)-(3.100) feltételeket. Ez azt jelenti, hogy K_P az X sokaság egy majdnem komplex struktúráját definiálja. Megmutatható [Hit00], hogy a funkcionál kritikus pontjaként kapható K_Γ majdnem komplex struktúra integrálható s így X egy (ezzel a komplex struktúrával ellátott) komplex sokaság lesz, továbbá Ω'_0 erre a komplex struktúrára nézve egy $(3, 0)$ típusú holomorf háromforma tehát $\Omega'_0 \in H^{3,0}(X, \mathbb{C})$.

Eredményünket az alábbi módon foglalhatjuk össze. Legyen X egy zárt irányítható sokaság és $P \in H^3(X, \mathbb{R})$ egy nemdegenerált háromforma. Ekkor a (3.70) összefonódottsági mérték segítségével definiált $V_H[P]$ Hitchin funkcionál $\mathcal{D}(P) < 0$ tulajdonsággal jellemzett $[P]$ kohomológia osztályból vett $\Gamma \in [P]$ kritikus pontja X -en egy komplex struktúrát definiál mellyel kapcsolatos holomorf háromforma: $\Omega'_0 = \Gamma + i\hat{\Gamma}$. Ezzel a holomorf háromformával V_H a kritikus pontban a (7.47) holomorf térfogat alakjában írható fel. A (3.70) összefonódottsági mértékkel kapcsolatos Hitchin funkcionál kritikus pontjai tehát a $\mathcal{D}(P) < 0$ esetben seholsem eltűnő holomorf háromformával rendelkező X komplex sokaságok. Speciálisan: mivel egy Calabi-Yau sokaság egy olyan Kähler sokaság melyre létezik egy seholsem eltűnő holomorf háromforma, ezért a CY sokaságok komplex struktúrái egy összefonódottsági mértékkel kapcsolatos funkcionál kritikus pontjaival kapcsolatosak. Figyeljük meg azt is, hogy a fenti differenciáلتopológiai processzus az összefonódottság nyelvén annak felel meg, hogy kiindulunk egy $P \in H^3(X, \mathbb{R})$ valós összefonódott¹⁸ állapotból, és végül a $V_H[P]$ kritikus pontjaként egy *komplex szeparálható* $\Omega'_0 = \Gamma + i\hat{\Gamma} \in H^{3,0}(X, \mathbb{C})$ állapotot kaptunk. Végezetül: a Hitchin funkcionált a kritikus pontban kiértékelve a (7.47) holomorf térfogatot kapjuk. Ez azonban (7.42) alapján alakilag éppen a fekete lyuk entrópiával (7.38) módon kapcsolatos $\Sigma(\Gamma)$ alapmennyiség. A most talált megfelelés természetének tisztázásához a következőkben megvizsgáljuk a Hitchin funkcionál és a BPS attraktorok közötti kapcsolatot.

7.5. BPS attraktorok mint kritikus pontok

Az előző fejezet alapján gyanítjuk, hogy az attraktor mechanizmus által az eseményhorizonton modulus stabilizációval előálló CY komplex struktúra ugyanaz mint a Hitchin funkcionál kritikus pontjaként előálló komplex struktúra [RSAC05]. A (7.35) és (7.28) képletekből következik, hogy az attraktor mechanizmus (AM) eredményeképp előálló komplex struktúra modulusok alakja

$$\tau_{AM}^a = \frac{p^a + i \frac{\partial \Sigma(\Gamma)}{\partial q_a}}{p^0 + i \frac{\partial \Sigma(\Gamma)}{\partial q_0}} \quad (7.50)$$

ahol $\Sigma(\Gamma)$ a (7.42) holomorf térfogat mely a p^I, q_I mennyiségek explicit függvénye. Másrészt a Hitchin funkcionál (HF) kritikus pontjaiból kapott a szeparálható $\Omega'_0 = X^I \alpha_I - F_I \beta^I = \Gamma + i\hat{\Gamma}$ holomorf háromforma periódusai által meghatározott modulusok alakja

$$\tau_{HF}^a = \frac{p^a + i\hat{p}^a}{p^0 + i\hat{p}^0} \quad (7.51)$$

hiszen $\Gamma = p^I \alpha_I - q_I \beta^I$ és $\hat{\Gamma} = \hat{p}^I \alpha_I - \hat{q}_I \beta^I$. Megfigyelésünk alapján

$$V_H(\Gamma) = \Sigma(\Gamma) \quad (7.52)$$

ahol a baloldalra (7.45) miatt igaz, hogy

$$2V_H(\Gamma) = \langle \Gamma, \hat{\Gamma} \rangle = \Gamma^A \hat{\Gamma}_A \quad (7.53)$$

¹⁸ $\mathcal{D}(P) \neq 0, \mathcal{D}(P) < 0$

míg a jobboldal homogenitási tulajdonságából¹⁹

$$2\Sigma(\Gamma) = \Gamma^A \frac{\partial \Sigma(\Gamma)}{\partial \Gamma^A} \quad (7.54)$$

tehát mivel a szimplektikus forma nem degenerált ebből következik, hogy

$$\hat{p}^I = \frac{\partial \Sigma(\Gamma)}{\partial q_I} \quad (7.55)$$

azaz a két különböző módon előálló modulusok egyenlők: $\tau_{HF}^a = \tau_{AM}^a$.

Az elmondottakat egy példán szemléltetjük [15]. Nevezetesen: megvizsgáljuk, hogy a toroidális kompaktifikáció kapcsán kapott eredményeink hogyan jelennek meg a Hichin funkcionális képbén. Legyen $X = T^6$ és használjuk a 5.3.3 fejezetben használt formalizmust! Tekintsük a (5.70)-(5.74) formulákkal definiált Γ kohomológia osztályát! Ebben az esetben $\dim \wedge^3 T^*X = 2h^{2,1} + 2 = 20$ ezért (7.19) értelmében Γ -t fermionikus összefonódott állapotként is interpretálhatjuk. Ez azt jelenti, hogy a (p^I, q_I) töltéseket bijektív módon megfeleltethetjük a γ_{ijk} konstans együtthatóknak²⁰. A bijekciónak köszönhetően a \hat{p}^I, \hat{q}_I mennyiségeket a (4.83) és (4.85) képletek és a (4.92) Freudenthal duált segítségével explicit módon felírhatjuk. Az explicit kapcsolathoz most a

$$(\eta, y, x, \xi) \equiv (p^0, -P, -Q, q_0) \quad (7.56)$$

megfeleltetést kell használnunk ahol y, x, P, Q 3×3 -as mátrixok.

A (7.42) és (7.47) formulákban feltűnő megfelelően átskálázott $\Omega'_0 = \mathcal{C}\Omega_0$ holomorf háromforma alakja

$$\Omega'_0 = \mathcal{C} (\alpha_0 + \tau^{ab} \alpha_{ab} + \tau^\sharp_{ab} \beta^{ba} - (\text{Det } \tau) \beta^0) \quad (7.57)$$

ahol most a $h^{2,1} = 9$ komplex modulust egy 3×3 -as mátrixba foglaltuk össze²¹ Könnyen belátható, hogy a fenti képlet a

$$z^a = u^a + \tau^{ab} v^b \quad (7.58)$$

komplex koordináta választással a

$$\Omega'_0 = \mathcal{C}\Omega_0 = \mathcal{C} dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3 = \Gamma + i\hat{\Gamma} \quad (7.59)$$

alakba írható. Ω'_0 tehát valóban egy szeparálható komplex $(3, 0)$ típusú háromforma alakjába írható, ugyanakkor $X = T^6$ (7.58) komplex koordinátáit is megadtuk. A τ^{ab} modulusok p^I, q_I függése még implicit, de a (7.51) képlet segítségével a modulusokra a

$$\tau = \frac{P + i\hat{P}}{p^0 + ip^0} \quad (7.60)$$

explicit 3×3 -as mátrix alak kapható. A Freudenthal duált \hat{P} és \hat{p}^0 meghatározása és algebrai manipulációk után kapjuk [9], hogy

$$\tau = \frac{1}{2} \left[-(2PQ + [p^0 q_0 - (P, Q)]) + i\sqrt{-\mathcal{D}} \right] (P^\sharp + p^0 Q)^{-1}. \quad (7.61)$$

ahol a képletben megjelenő jelölések jelentését illetően lásd a (4.38), (4.41), (4.35) illetve (4.85) formulákat. Hangsúlyozzuk, hogy ahhoz hogy a

$$\tau^{ij} = x^{ij} - iy^{ij}, \quad y^{ij} > 0, \quad (7.62)$$

felírással és (5.76) baloldalának pozitivitásával összhangban legyünk a töltésekre a $\mathcal{D}(\Gamma) < 0$ feltételen túl megfelelő kényszereket kell kikötnünk²².

¹⁹Lásd a (15) lábjegyzetet.

²⁰Lásd a (5.73)-(5.74) megfeleltetést.

²¹A képlet az $X^0 = 1$ mértékben értendő.

²²Lásd például a (5.183) formulát követő fejtegetéseket.

A (7.41) formulában szereplő \mathcal{C} és $e^{-\mathcal{K}}$ mennyiségek explicit meghatározása és $\Sigma(\Gamma)$ számolása után kapjuk, hogy [9]

$$S_{BH} = \pi\Sigma(\Gamma) = \pi V_H(\Gamma) = \pi\sqrt{-\mathcal{D}(\Gamma)} \quad (7.63)$$

ahol

$$\mathcal{D}(\Gamma) = [p^0 q_0 - (P, Q)]^2 - 4(P^\sharp, Q^\sharp) - 4p^0 N(Q) - 4q_0 N(P), \quad (7.64)$$

a szokásos Freudenthal-féle kvartikus invariáns mely (3.70) szerint a hármas összefonás fermionikus általánosításával kapcsolatos összefonódottsági mérték [18].

Írjuk most fel Γ -t a stabilizált modulusokkal! Kapjuk

$$\Gamma = \frac{1}{2}(\mathcal{C}\Omega_0 + \overline{\mathcal{C}}\overline{\Omega}_0) = \overline{Z}(ie^{K/2}\Omega_0) + (-Z)(ie^{K/2}\overline{\Omega}_0) \quad (7.65)$$

ahol most \mathcal{C} -t a (7.39) alakban parametrizáltuk ahol $Z = e^{K/2}W = e^{i\alpha}Z$. Ez a felírás a Γ Hodge diagonális bázisban történő (5.53) kifejtésnek felel meg melyet $|Z|^2 = \sqrt{-\mathcal{D}}$ miatt mint tudjuk az alábbi GHZ szerű alakba írhatunk

$$|\Gamma\rangle = (-\mathcal{D})^{1/4} (e^{-i\alpha}|\overline{123}\rangle - e^{i\alpha}|123\rangle), \quad \tan \alpha = \frac{p^0}{\tilde{p}^0}. \quad (7.66)$$

Figyeljük meg, hogy a megjelenő $e^{i\alpha}$ fázisfaktor szerkezete összhangban van a (7.36) és (7.52) formulákkal.

A CY sokaságok komplex struktúrája tehát megkapható egy összefonódottsági mértékkel kapcsolatos funkcionál extremalizációjával. A CY sokaságok azonban Kähler sokaságok is. Ha feltesszük, hogy a kiindulási sokaság már eleve egy komplex Kähler sokaság ω Kähler formával akkor az Ω'_0 holomorf háromformával kapcsolatos komplex struktúrának kompatibilisnek kell lennie ω -val. Mint azt a 3.2.4 fejezetből megtudhattuk ez a kompatibilitási feltétel az $\omega \wedge \Omega'_0 = 0$ alakú. Azt is tudjuk, hogy $X = T^6$ esetén ez a feltétel az (5.65) és (5.75) feltételek megjelenését vonja maga után. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált tórusz most egy principálisan polarizált tórusz lesz²³. Hogyan módosíthatjuk a Hitchin funkcionált ahhoz, hogy ezt az esetet is megkapjuk? A megfelelő módosítást úgy kapjuk, hogy az eredeti Hitchin funkcionálban szereplő kvartikus invariánst megszorítjuk a 4.1 táblázat harmadik sorában szereplő Freudenthal rendszer kvartikus invariánsára. Ez a lépés a funkcionál lokális invarianciacsoportját (SLOCC csoport) $SL(6, \mathbb{R})$ -ről $Sp(6, \mathbb{R})$ -re redukálja. Ezzel a lépéssel a funkcionál kellemes tulajdonságai [Hit00, Hit01] nem romlanak el tekintettel arra, hogy akárcsak a Hitchin funkcionállal kapcsolatos Freudenthal rendszer ez az új rendszer is egy prehomogén vektorteret alkot [SK77, Cle03]. Ebben az esetben a τ komplex struktúra modulusok száma 6 melyet a τ mátrix szimmetrikussága foglal össze ($h^{2,1} = 6$), a töltések száma pedig $2h^{2,1} + 2 = 14$. Az utóbbi szám (3.62) miatt pontosan a $\wedge_0^3 T^*X$ primitív háromformák terének dimenziója. Ebben az esetben a végeredményt [Moo98] a (7.63)-(7.66) formulák adják ahol most a megfelelő formulákban a P, Q szimmetrikus mátrixokat kell használni. Az eset geometriáját a 4.1 táblázat harmadik sorának megfelelő Freudenthal rendszer foglalja össze.

Amennyiben $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ az előző bekezdés esetét tovább specifikálhatjuk az STU modellre. Ekkor a funkcionál lokális invarianciacsoportja tovább redukálódik $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ -re. A komplex struktúra modulusok száma 3 melyeket a τ mátrix három diagonális eleme reprezentál ($h^{2,1} = 3$), a töltések száma $2h^{2,1} + 2 = 8$ melyeket szokás szerint egy három-qubit állapotban foglalhatunk össze. A végeredményt ismét a (7.63)-(7.66) formulák adják ahol most a megfelelő formulákban a P, Q diagonális mátrixokat kell használni. Ellenőrizhető [15], hogy a stabilizált modulusokra a (7.61) képletből az (5.181), az entrópiára az (5.171) illetve az α fázisra az (5.184) formulákat kapjuk vissza. Az STU eset geometriáját a 4.1 táblázat második sorának megfelelő Freudenthal rendszer foglalja össze.

²³Lásd a 3.fejezet 18. lábjegyzetét.

Amikor az $X = T^2 \times T^2 \times T^2$ -ben szereplő tóruszokat nem tekintjük megkülönböztethetőknek ("diagonális tórusz"), a T^3 modellt kapjuk. Funkcionálunk lokális invarianciacsoportja ekkor még tovább redukálódik $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ csoport diagonális hatására. Ekkor már csak egyetlen komplex struktúra modulusunk van ($h^{2,1} = 1$), a töltések száma $2h^{2,1} + 2 = 4$ melyeket egy három bozonikus-qubit állapotban foglalhatunk össze. Ezt az esetet a 4.2 fejezetben részletesen elemeztük. A négy töltéssel paraméterezett kohomológia elem ezúttal a

$$\Gamma = p^0 \alpha_0 + p(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - q(\beta^1 + \beta^2 + \beta^3) - q_0 \beta^0. \quad (7.67)$$

alakot ölti melyet a (4.3) bozonikus három-qubit alakba írhatunk. A végeredményt ezúttal is a (7.63)-(7.66) formulák megfelelően módosított alakjai adják. Például az entrópia kifejezésében a (4.5) formula jelenik meg mely a (4.9) köbös forma diszkriminánsával (4.7) kapcsolatos. Az T^3 eset geometriáját a 4.1 táblázat első sorának megfelelő Freudenthal rendszer foglalja össze.

7.6. Általánosított Hitchin funkcionál

7.6.1. Motiváció Az előző fejezetben láttuk, hogy a V_H Hitchin funkcionál kritikus pontban felvett értéke fontos fizikai interpretációval rendelkezik. Nevezetesen a (7.63) összefüggés szerint V_H ezen értéke az attraktor mechanizmus eredményeképpen előálló szemiklasszikus Bekenstein-Hawking entrópiával kapcsolatos. Figyeljük meg, hogy a Hitchin funkcionális tárgyalás egyből reprodukálja a jóval bonyolultabb attraktoros analízis *eseményhorizonton* előálló eredményét. Sőt a (7.35)-(7.36) képletek következtében a horizonton stabilizált alapvető mennyiségeket harmonikus függvények segítségével a *horizonton kívülre* is elfolytathatjuk. A V_H -n alapuló tárgyalás külön pikantériája, hogy az attraktoros eredmény az összefonódottságelmélet nyelvén is megfogalmazható. Ez az eredmény egyfajta univerzalitást sejtet. Valóban ez az eredmény azt sugallja, hogy a húrelméleti részletektől teljesen függetlenül bizonyos típusú fekete lyuk megoldások horizonton előálló viselkedése speciális stabil formákkal kapcsolatos funkcionálok nyelvén is megfogalmazható [RSAC05]. Mivel ezek a stabil formák valószínűsíthetően prehomogén vektorterekkel, ezek pedig speciális összefonódott rendszerekkel kapcsolatosak ezért felmerül az az izgalmas lehetőség, hogy a FLYQM megfelelést tovább általánosítsuk [15].

A Hitchin funkcionál eddigi alkalmazásai a klasszikus megoldásokkal kapcsolatos kritikus pontokkal voltak kapcsolatban. Ez az analízis csupán az entrópia szemiklasszikus Bekenstein-Hawking részét adta. Amennyiben azonban V_H -t egy funkcionálintegrálban megjelenő hatásként interpretáljuk, felmerül az a lehetőség is hogy az S_{BH} entrópiához kvantumkorrekciókat számoljunk. Tekintsük az alábbi partíciós függvényt [RSAC05]

$$Z_H(\gamma) = \int_{[P]=\Gamma} e^{V_H(P+d\varphi)} \mathcal{D}\varphi \quad (7.68)$$

ahol γ most a Γ kohomológia elem Poincaré duáltja. Érdekes módon ez a (7.68)-cal kapcsolatos térelmélet ugyanazt a differenciáltopológiai információt tartalmazza mint az eredetileg E. Witten által jóval régebben javasolt topológikus kombinált B és \bar{B} -típusú [Wit88b] húrelméletek²⁴. Ezen megfigyelés eredményeképpen született meg az a sejtés miszerint a (7.68) partíciós függvény a kombinált topológikus B és \bar{B} -típusú modellek Wigner transzformáltja. A nyeregpont módszerrel könnyű leellenőrizni, hogy a sejtés a klasszikus szinten igaz. A kombinált B és \bar{B} -típusú modellekre a partíciós függvény egy hurok szinten vett alakja már ismert volt [BCOV94], a Hitchin funkcionállal kapcsolatos partíciós (7.68) függvényre a számításokat egy hurok szinten

²⁴Witten eredetileg ezt a topológikus térelméletet a szuperszimmetrikus CY kompaktifikációk matematikai szerkezetének megértésére kitalált "játékmodellként" javasolta. A modell alaposan túlnőtt ezen a célon. A topológikus hurokkal kapcsolatos Ooguri-Strominger-Vafa sejtés [OSV04] szerint ugyanis a topológikus hurok partíciós függvénye és a kvantum korrekciókat is figyelembe vevő fekete lyuk entrópia matematikailag precíz módon megfogalmazott kapcsolatban kell hogy álljanak.

Pestun és Witten végezték el [PW05]. A számítások alapján a hurok korrekciók nem egyeztek. Azonban még ugyanebben a munkában [PW05] a szerzők megmutatták, hogy amennyiben (7.68)-ban a V_H Hitchin funkcionál helyett a V_{GH} úgynevezett *általánosított Hitchin funkcionál* használjuk akkor az egy-hurok korrekciók megegyeznek.

Ebben a fejezetben megmutatjuk [15], hogy az általánosított Hitchin funkcionál a hat egy-részecske állapotos fermionikus összefonódottság általánosítása kapcsán bevezetett (3.224) és (3.228) összefonódottsági mértékekkel kapcsolatos. Ezek a mértékek a kvaterniós Jordan algebrákkal kapcsolatos Freudenthal rendszerek (4.85) kvartikus invariánsával kapcsolatosak. Ez a felismerés fejtegetéseinket a 4.1 táblázat negyedik sorában összefoglalt Freudenthal rendszerek geometriájával és a topológikus hurokkal kapcsolja össze.

7.6.2. Általánosított Calabi Yau sokaságok Az előző fejezetekből kiderült, hogy a CY sokaságok két fontos struktúrával rendelkeznek: a komplex és a Kähler struktúrával. Eddig a komplex struktúrával és az ezzel kapcsolatos modulus térrel foglalkoztunk. Láttuk, hogy fizikai szempontból ezt a struktúrát a IIB húrelméletbe tudjuk a legtermészetesebben beágyazni. Korábban azonban azt is említettük, hogy az érem másik oldalával foglalkozó Kähler struktúra deformációk természetes mozgástere a IIA húrelmélet²⁵. Mivel a IIA és IIB húrelméleteket a tükörszimmetriának nevezett dualitás köti össze, ezért a korábbi eredményeinket könnyen átkonvertálhatjuk a IIA kontextusba, feltéve ha a tükörszimmetria húrelméletből ismert jelenségének megtaláljuk a Hitchin funkcionálok nyelvén megfogalmazott megfelelőjét.

Az ÁCY, általánosított CY, sokaságok [Hit03] a komplex és a szimplektikus struktúrák matematikáját egy a tükörszimmetriát természetes módon implementáló formalizmus keretén belül kombinálják. A továbbiakban számunkra az ÁCY-sokaságokat illetően csak az összefonódottsággal kapcsolatos vonatkozások tisztázásához szükséges minimális információra lesz szükségünk.

Legyen X egy zárt irányítható N dimenziós sokaság. Tekintsük a sokaság egy tetszőleges $x \in X$ pontjában az érintő és koérintő tereket. Ezek egy-egy N dimenziós valós V és V^* vektorteret adnak. Képezzük a $\mathcal{V} = V \oplus V^*$ vektorteret melyet a (3.171) kvadratikussal látunk el²⁶. A \mathcal{V} vektortérből kiindulva a 3.5 fejezetben megismert konstrukcióval bevezethetjük a (3.204) és (3.200) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ \oplus \mathcal{F}^-$ Fock teret melynek elemei a φ (3.205) fermionikus állapotok. Mint tudjuk matematikai szempontból ezek az állapotok spinorok (poliformák). Továbbá a szeparálható fermion állapotok matematikai reprezentánsai a (3.209) alakban előállítható egyszerű, vagy tiszta spinorok. Azok a fermionikus állapotok melyek nem állíthatók elő ilyen alakban összefonódtak. Emlékeztetünk még arra is hogy a fermionikus Fock téren megadható egy (3.212)-(3.213) alakú $Spin(2N)$ invariáns $(\cdot|\cdot)$ bilineáris forma.

Tekintsük most az X sokaság érintő és koérintő nyalábainak direkt összegét: $T \oplus T^*$. Ez a tér természetes módon el van látva a (3.5) kvadratikussal formához asszociált bilineáris formából származtatott indefinit (N, N) szignatúrájú metrikával²⁷. Tekintsük a direkt összeg nyaláb $(T \oplus T^*) \otimes \mathbb{C}$ komplexifikáltját! A fermionikus állapotok előző bekezdésbeli lokális konstrukcióját a sokaságra vonatkoztatva a fermionikus állapotok általánosításaként komplex értékű Φ differenciál poliformákat kapunk

$$\Phi \in \mathcal{F}(X) \otimes \mathbb{C} \equiv \wedge^\bullet T^* \otimes (\wedge^N T)^{1/2} \otimes \mathbb{C} \quad (7.69)$$

ahol a fenti képlet azt jelenti, hogy a Φ mennyiségek a jobboldali nyaláb szelései. Nyilván $\mathcal{F}(X) \otimes \mathbb{C} = (\mathcal{F}^+(X) \oplus \mathcal{F}^-(X)) \otimes \mathbb{C}$ azaz egy tetszőleges poliforma felbontható pozitív és negatív kiralitású poliformák összegére. Egy Φ differenciál poliforma felírható a (3.205) alakban ahol

²⁵Emlékeztetünk arra, hogy egy Kähler sokaság egy olyan *szimplektikus sokaság*ként is felfogható mely egy a szimplektikus formával kompatibilis integrálható komplex struktúrával is el van látva.

²⁶A továbbiakban a 3.5 fejezetben használt általánosított fermionrendszerek formalizmusát használjuk azzal a fontos különbséggel, hogy most a használt vektorterek egyenlőre valósak nem pedig komplexek.

²⁷Mivel a (3.5) kvadratikussal forma mátrixa (3.206) alakú ezért diagonalizálás után a pozitív és negatív sajátértékek száma egyaránt N .

$e^{i_k} \leftrightarrow dx^{i_k}$ és a kifejtési együtthatók most $\Phi_{i_1 \dots i_k}^{(k)}(x)$ alakú síma függvények. Ebben a képben a Φ_1, Φ_2 komplex differenciál poliformákra $(\Phi_1 | \Phi_2)$ az X sokaságon egy komplex értékű függvény lesz.

Általánosított Calabi-Yau sokaságnak [Hit03] egy olyan síma N dimenziós sokaságot nevezünk melyre létezik egy olyan zárt φ pozitív vagy negatív kiralítású komplex differenciál poliforma mely szeparálható²⁸ és melyre X minden pontjában $(\Phi | \bar{\Phi}) \neq 0$.

A CY sokaságok számunkra igen fontos kísérőtere a komplex struktúrák modulustere volt. Az ÁCY sokaságokra a megfelelő tér az úgynevezett általánosított komplex struktúrák (ÁKS) modulustere. Egy ÁKS a $(T \oplus T^*) \otimes \mathbb{C}$ nyaláb olyan E izotróp²⁹ résznyalábja melyre $E \oplus \bar{E} = (T \oplus T^*) \otimes \mathbb{C}$ és melynek a szelései zártak a

$$[A + \alpha, B + \beta] = [A, B] + \mathcal{L}_A \beta - \mathcal{L}_B \alpha - \frac{1}{2} d(\iota(A)\beta - \iota(B)\alpha) \quad (7.70)$$

Courant zárójelre ahol $A + \alpha, B + \beta \in T \oplus T^*$ és \mathcal{L}_A az A vektormező irányában vett Lie-derivált.

Nyilván egy seholsem eltűnő Ω_0 holomorf m -formával ellátott X komplex $N = 2m$ dimenziós CY sokaság ÁCY sokaság is. Valóban, Ω_0 szeparálható és zárt, továbbá $(\Omega_0 | \bar{\Omega}_0) = (-1)^m \langle \Omega_0, \bar{\Omega}_0 \rangle \neq 0$. Másrészt ha X egy $N = 2m$ dimenziós, ω szimplektikus formával ellátott sokaság akkor $\Phi = e^{i\omega} \in \mathcal{F}^+(X) \otimes \mathbb{C}$ egy zárt poliforma hiszen az ω zárt. Továbbá mivel (3.209) miatt Φ a vákuum B -transzformáltja ezért Φ tiszta spinor tehát szeparálható. Egy rövid számolás (3.212) felhasználásával pedig azt mutatja, hogy $(\Phi | \bar{\Phi}) = (-2i\omega)^m / m! \neq 0$ tehát a szimplektikus sokaságok is ÁCY sokaságok. A (3.207) alakú zárt B két forma által definiált transzformációk $Spin_0(2N)$ transzformációk, és ezek (3.211) miatt őrzik a $(\cdot | \cdot)$ bilineáris formát. Ebből és (3.209)-ből fakadóan a $\lambda e^B \Phi = \lambda e^{B+i\omega}$ zárt, szeparálható poliformával ellátott X sokaságok is ÁCY-sokaságok. Ennek felhasználásával könnyen konstruálható olyan példa melyre egy CY és egy szimplektikus sokaság releváns ÁCY struktúrái (poliformái) egymás B -transzformáltjai [Hit03]. Ennek alapján a szimplektikus és CY sokaságok az ÁCY sokaságok két szélsőségesen különböző eseteinek tekinthetők. Megjegyezzük hogy egy $\lambda e^B \varphi = \lambda e^{B+i\omega}$ poliformával ellátott komplex ÁCY sokaság kohomológia osztálya a húrelméletben a (7.4) formula utáni bekezdésben említett komplexifikált Kähler osztállyal kapcsolatos. Érdeemes felidézünk azt is, hogy a 3.5 fejezet alapján a B -transzformált a fermionikus összefonódottság kontextusban speciális Bogoliubov transzformációknak felel meg.

7.6.3. A kvaterniós Freudenthal rendszer és az általánosított Hitchin funkcionál [15]. Az alábbiakban megadjuk az általánosított Hitchin funkcionál explicit alakját. A tárgyalásunk mely a véleményünk szerint sokkal esztétikusabb Freudenthal rendszerek univerzális tulajdonságain alapul itt eltér az irodalomban megszokott formalizmustól [Hit03]. Ennek a formalizmusnak az előnyeként a fermionikus összefonódottsággal kapcsolatos struktúrák explicit módon jelennek meg.

Legyen X most ismét egy hat dimenziós irányítható zárt síma sokaság, és legyen $\varphi \in \mathcal{F}^+(X)$ egy valós pozitív kiralítású poliforma³⁰! Az ilyen tulajdonságú poliformákat a (3.222)-szerű alakba írhatjuk, ahol most a kifejtési együtthatókkal kapcsolatos mennyiségek síma módon függenek az X lokális koordinátáitól, továbbá az e^{i_k} duális bázisvektorok helyett a dx^{i_k} koordinátadifferenciálok értendők. A φ poliforma pozitív kiralítású, ezért a benne szereplő formák: nulla, kettő, négy és hat-formák a megfelelő együtthatók pedig:

$$\varphi \leftrightarrow (\eta, y, x, \xi) \quad (7.71)$$

²⁸Emlékeztetünk arra, hogy ez a fogalom azt jelenti, hogy φ egy tiszta spinor, azaz a φ poliforma (3.208) annihilátor tere teljesen izotróp.

²⁹Ez azt jelenti hogy a nyaláb szelései (vektormezői) izotrópok azaz fényszerűek az (N, N) szignatúrájú metrikára nézve.

³⁰A negatív kiralítású esetet később tárgyaljuk.

melyek $1 + 15 + 15 + 1 = 32$ valós síma függvény megadását jelentik.

Nyilván a 4. fejezet végén mondottak értelmében egy rögzített $x \in X$ esetén a fenti adatok megadása ekvivalens a kvaterniós Jordan algebrán alapuló valós Freudenthal rendszer megadásával, melyet (4.78) szerint az ott tárgyalt komplexifikált Freudenthal rendszerbe beágyazottnak képzelünk el. A kvaterniós Freudenthal rendszer és a pozitív kiralitású poliformák közötti ezen megfelelés értelmében funkcionálunk megkonstruálásához a Freudenthal rendszerek univerzális tulajdonságait használhatjuk. Ezek közül a legfontosabb tulajdonság az, hogy a 4.1 táblázatban szereplő Freudenthal rendszerek mindegyikére a $(\mathbb{C}^\times \times G, \mathcal{W}(\mathcal{J}), \mathcal{R})$ hármas egy prehomogén vektorteret definiál [Cle03]. Itt G a táblázatban szereplő szimmetriacsoport míg $\mathbb{C}^\times \times G$ a SLOCC csoport, $\mathcal{W}(\mathcal{J})$ a (4.78) alakban előálló \mathcal{J} Jordan algebrán alapuló vektortér, és \mathcal{R} pedig a fenti vektortéren ható (4.61)-(4.63) ábrázolás. A prehomogenitásból következően a komplex esetben létezik egy $\mathcal{D}(\varphi) \neq 0$ tulajdonsággal jellemzett sűrű SLOCC pálya. A valós esetben két ilyen pálya létezik attól függően, hogy $\mathcal{D}(\varphi)$ pozitív vagy negatív. Ez a tulajdonság lehetővé teszi, hogy olyan G invariáns funkcionálokat írjunk fel melyek kritikus pontjai a megfelelő sokaságokon speciális geometriai struktúrákat adnak (CY, szimplektikus, ÁCY stb.).

Használjuk most a 4.1 táblázat ötödik sorának megfelelő kvaterniós esetben a 4.3.6. alfejezetben definiált fogalmakat és jelöléseket! Ekkor a V_{GH} általánosított Hitchin funkcionál a

$$V_{GH}[\varphi] = \int_X \sqrt{|\mathcal{D}(\varphi)|} d^6x = \frac{1}{2} \int_X (\varphi|\varphi) d^6x = \int_X \{\hat{\varphi}|\varphi\} d^6x \quad (7.72)$$

formula definiálja ahol $\mathcal{D}(\varphi)$ a (4.85) explicit képlettel adott és felhasználtuk a (4.32), (4.82) és (4.92) összefüggéseket.

A [Cle03] dolgozat 8.4.-es állítása értelmében a 4.1 táblázat bármelyik Freudenthal rendszerére igaz az, hogy a rendszer egy tetszőleges nemdegenerált elemét egyértelműen felbonthatjuk két olyan szeparálható elem összegére melyek Freudenthal-féle szimplektikus szorzata nem zérus³¹. Esetünkben ez azt jelenti hogy tetszőleges komplex nemdegenerált ($\mathcal{D}(\varphi) \neq 0$) poliforma felírható a

$$\varphi = \frac{1}{2}(\Phi_+ + \Phi_-) \quad (7.73)$$

alakban ahol Φ_\pm szeparálható poliformák és $\{\Phi_+, \Phi_-\} \neq 0$. Az is belátható [Hit03], hogy $\Phi_\pm = \varphi \pm i\hat{\varphi}$ ahol a definíciókat illetően lásd (4.92). Ekkor (7.46)-hez hasonlóan

$$V_{GH} = \frac{i}{4} \int_X (\Phi_+|\Phi_-) d^6x \quad (7.74)$$

Legyen most φ egy valós nemdegenerált poliforma mely a $\mathcal{D} < 0$ pályához tartozik! Ekkor a $\Phi \equiv \Phi_+$ és $\bar{\Phi} = \Phi_-$ jelöléssel egy olyan komplex szeparálható poliformát kapunk melyre az X minden pontjában $(\Phi|\bar{\Phi}) \neq 0$. Továbbá amennyiben φ eredetileg zárt volt akkor a (7.48)-(7.49)-ben vázolt bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy az általánosított Hitchin funkcionál kritikus pontjaira $d\hat{\varphi} = 0$ azaz a Freudenthal duált poliforma is zárt. Ennek következtében a komplex Φ szeparálható poliforma is zárt lesz. Az X sokaságon megadott fermionikus összefonódott rendszerekkel kapcsolatos V_{GH} funkcionál kritikus pontjai tehát általánosított Calabi-Yau struktúrák.

7.6.4. Fizikai interpretáció A IIB képben láttuk, hogy a CY sokaság valós zárt Γ háromformája $D3$ membránok homológia ciklusokra történő csavarodási számait kódolta. A csavarodási számokat elektromos és mágneses töltéseként interpretálhattuk. Mi a valós zárt φ poliforma fizikai jelentése? A 5.4.2 fejezetben összehasonlítottuk a IIA és IIB típusú húrelméleteket. Itt láttuk, hogy az elméletek bozonikus szektorának az a része mely fermionikus szabadsági fokokból

³¹Lásd a (4.14)-(4.17) axiómákat.

származik antiszimmetrikus C_p tenzortereket tartalmaz ahol a IIA esetben p páratlan a IIB esetben páros. A IIB esetben például az (5.96) képlet második tagjából láthatóan a C_4 potenciálhoz természetesen csatolódó objektum egy $D3$ három-brán. A IIA elmélet analízisével megmutatható [JHS07], hogy a valós φ poliforma (7.71) adataiban szereplő $1 + 15 + 15 + 1$ felbontás $D0 - D2 - D4 - D6$ bránok a φ -hez Poincaré duált megfelelő dimenziós homológia ciklusokra történő csavarodási számaiként interpretálható³².

Valóban legyen az általánosított CY struktúra az X sokaság szimplektikus struktúrája ω szimplektikus formával. Ekkor

$$\Phi \equiv e^{i\omega} = 1 + i\omega - \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{6}i\omega^3 \quad (7.75)$$

és tekintsük X páros dimenziós homológiáját: $H_+ = H_0 \oplus H_2 \oplus H_4 \oplus H_6$! Ekkor egy rögzített csavarodási konfigurációt leíró homológia elem Poincaré duáltja a $\varphi \in H^+ = H^0 \oplus H^2 \oplus H^4 \oplus H^6$ poliforma. (7.7)-hez hasonlóan az általánosított komplex struktúrák modusterének lokális koordinátái

$$X^0 = 1, \quad F_0 = -\frac{1}{6}i \int_X \omega^3, \quad X^I = i \int_{A^I} \omega, \quad F_I = -\frac{1}{2} \int_{B_I} \omega^2 \quad (7.76)$$

ahol $1, A^a, B_a, X$ a homológia zérus, kettő, négy és hat dimenziós bázis ciklusai.

Megmutatható [Pes06], hogy a Hitchin funkcionálnál részletesen tárgyalt komplex struktúra modulus stabilizáció és az általánosított Hitchin funkcionálnál előálló általánosított komplex struktúra modulusok stabilizációjának mechanizmusa teljesen analóg. Egy "szemléletes" fizikai realizációra a legegyszerűbb lehetőség most a IIA elmélet T^6 -ra történő kompaktifikációjával kapcsolatos BPS fekete lyuk megoldások és a megfelelő attraktorok vizsgálata.

A IIA modell kompaktifikációja $N = 8$ effektív szupergravitációra vezet melynek ismét az $N = 2$ csonkítását kell vizsgálni. Ez azt jelenti, hogy az $N = 8$ modellnek csak azokat az $N = 2$ vektormultipliettjeit tartjuk meg melyekkel kapcsolatos skalártereket az $X = T^6$ általánosított komplex struktúra modulusaival azonosíthatjuk [Pes06]. A tórusz páros Hodge számai

$$h^{0,0} = h^{3,3} = 1, \quad h^{2,0} = h^{0,2} = h^{3,1} = h^{1,3} = 3, \quad h^{1,1} = h^{2,2} = 9 \quad (7.77)$$

A páros kiralítású φ poliforma 32 bázisvektora és a fenti Hodge számokkal jellemzett páros kohomológia bázisvektorai között most egy bijekció van. Valóban ha a (4.18) kifejtésben szereplő $\hat{p}^i, i = 1, \dots, 6$ operátorokat a $(\hat{p}^1, \hat{p}^2, \hat{p}^3, \hat{p}^{\bar{1}}, \hat{p}^{\bar{2}}, \hat{p}^{\bar{3}})$ alakba írjuk akkor a $\hat{p}^a \leftrightarrow dz^a, \hat{p}^{\bar{a}} \leftrightarrow d\bar{z}^{\bar{a}}$ megfeleltetéssel ahol $a = 1, 2, 3$ a bijekció nyilvánvaló. A (7.76) koordinátákra most $I = 1, 2, \dots, 15$ melyek egy antiszimmetrikus 6×6 -os X^{ij} mátrixba is elrendezhetők és az ω helyett most a komplexifikált $\omega + iB$ Kähler formát kell vennünk. Megmutatható, hogy a (7.15) prepotenciál ebben az esetben az

$$\mathcal{F} = -\frac{\text{Pf}(X)}{X^0} \quad (7.78)$$

alakot ölti ahol $\text{Pf}(X)$ a (3.224) kapcsán már ismerős, X^{ij} mátrix Pfaffian-ja.

Tekintsük most a valós φ poliformát ahol a csavarodási számok és a Freudenthal paraméterek közötti kapcsolatot ismét a (7.56) alakban definiáljuk, de most a megfelelő mátrixok (P, Q, y, x) antiszimmetrikus 6×6 -os mátrixok. Használjuk most a komplex szeparálható Φ poliforma kifejtésére a (7.57) alakot ahol: a megfelelő mátrixok ismét 6×6 -osak, a τ^{ij} mátrix most az X^{ij} mátrixnak felel meg az $X^0 = 1$ mértékben, a fennmaradó mennyiségeket pedig a (4.43)-(4.44) szótárnak megfelelően átírjuk. Ekkor a V_{HG} funkcionál kritikus pontjának megfelelő stabilizált általánosított komplex struktúra modulusokra a (7.60) képletet kapjuk ahol értelemeszerűen ismét 6×6 -os mátrixokat kell használni, és a Freudenthal duált kifejezéseket a (4.83) és (4.92) módon

³²A (7.71)-ben szereplő 32 kifejtési együttható és a független Poincaré duált homológiaciklusok osztályai között természetesen általában nincs bijektív kapcsolat. A szituáció teljesen analóg a (7.19) kapcsán elmondottakkal.

kell számolni. Megismételve a V_H esetére már megismert lépéseket a BPS fekete lyuk megoldás entrópiájára kapjuk, hogy

$$S_{BH} = \pi V_{GH}(\phi) = \pi \sqrt{-\mathcal{D}(\varphi)} \quad (7.79)$$

ahol $\mathcal{D}(\varphi)$ töltésekkel kifejezett alakjához használnunk kell a (4.85) formulát és a (7.56) megfeleltetést. Ez az eredmény [15] azt mutatja, hogy az általánosított komplex struktúra stabilizáció eredményeképp kapott entrópia éppen a fermionikus rendszereknél megismert (3.224) összefonódottsági mérték.

7.6.5. IIA-IIB dualitás Az általánosított Hitchin funkcionállal kapcsolatos fizikát ezidáig pozitív kiralitású φ poliformák esetén vizsgáltuk. A negatív kiralitású eset azonban természetesebbnek tűnik, hiszen ebben az esetben $\psi \in H^1 \oplus H^3 \oplus H^5$ s így a IIB képből már jól ismert $D3$ brános formalizmust kell visszakapnunk. Ebben a képben a három fermion és három-qubit állapotokkal kapcsolatos struktúrák is jobban látszanak.

Tekintsünk tehát egy (3.226) alakú zárt ψ poliformát ahol az e^{i_k} duális bázisvektorok helyett ismét dx^{i_k} koordinátadifferenciálokat és $x \in X$ lokális koordinátáktól függő kifejtési együtthatókat használunk. A (3.226) kifejtésből láthatóan a poliformát jellemző adatok

$$(u_i, P_{ijk}, v^i) \quad (7.80)$$

ahol u és v hat komponensű vektorterek P pedig a háromfermionos esetből ismert 20 komponensű tenzortér. az általánosított Hitchin funkcionál most a

$$V_{GH}[\psi] = \int_X \sqrt{|\mathcal{D}(\psi)|} d^6x \quad (7.81)$$

alakú ahol $\mathcal{D}(\psi)$ a (3.228) jobb oldalán álló kifejezés. Rögzített $x \in X$ esetén ez a kifejezés a páratlan fermionszámú hat egyrészesce állapotos rendszerek összefonódottsági mértéke.

Látható, hogy amennyiben a rögzített fermionszámú $(v, P, u) = (0, P, 0)$ esetre korlátozzuk figyelmünket akkor V_{GH} a V_H Hitchin funkcionált adja vissza. A Hitchin funkcionállal kapcsolatban láttuk, hogy az integrálható majdnem komplex struktúrát a K_P mátrix adja. A (3.227) képletből most azt is látjuk, hogy az általánosított komplex struktúrát a K_ψ 12×12 -es mátrix (momentum leképezés mátrixa) adja. Ennek a struktúrának a polarizáltja a Freudenthal rendszereknél megismert $K_{\psi_1\psi_2}$ leképezést adja, mely a (4.29) és az általánosabb (4.31) formulákon keresztül a Freudenthal-féle hármasszorzást definiálja. A (3.227) formulából az is látható, hogy az általánosított majdnem komplex struktúra, hogyan foglalja magába a majdnem komplex struktúrát. A $V_{GH}[\psi]$ alak váriálása és alternatív alakjainak felírásához célszerű az alábbi szótárat használni

$$(\eta, y, x, \xi) \leftrightarrow (u, P, v) \quad (7.82)$$

ahol a bijekció explicit alakja [11]

$$x^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 & P_{1\bar{2}3} & P_{1\bar{3}1} & P_{1\bar{1}2} \\ -u_3 & 0 & u_1 & P_{2\bar{2}3} & P_{2\bar{3}1} & P_{2\bar{1}2} \\ u_2 & -u_1 & 0 & P_{3\bar{2}3} & P_{3\bar{3}1} & P_{3\bar{1}2} \\ -P_{1\bar{2}3} & -P_{2\bar{2}3} & -P_{3\bar{2}3} & 0 & v^3 & -v^2 \\ -P_{1\bar{3}1} & -P_{2\bar{3}1} & -P_{3\bar{3}1} & -v^3 & 0 & v^1 \\ -P_{1\bar{1}2} & -P_{2\bar{1}2} & -P_{3\bar{1}2} & W^2 & -v^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = P_{1\bar{2}3} \quad (7.83)$$

$$y_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 & -P_{123} & -P_{223} & -P_{323} \\ v_3 & 0 & -v_1 & -P_{131} & -P_{231} & -P_{331} \\ -v_2 & v_1 & 0 & -P_{112} & -P_{212} & -P_{312} \\ P_{123} & P_{131} & P_{112} & 0 & -u_3 & u_2 \\ P_{223} & P_{231} & P_{212} & u_3 & 0 & -u_1 \\ P_{323} & P_{331} & P_{312} & -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = -P_{123}. \quad (7.84)$$

Vegyük észre, hogy a fenti bijekciót a

$$\hat{g}_i = \hat{p}^i + \hat{n}_i, \quad \hat{g}_{i+N} = \hat{p}^i - \hat{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (7.85)$$

operátorok segítségével az elegáns

$$|\varphi\rangle = \hat{g}_1 \hat{g}_2 \hat{g}_3 |\psi\rangle \quad (7.86)$$

alakba írhatjuk ahol most a poliformás alak helyett a (4.18)-ban felírt fermionikus állapotos alakot használtuk. Figyeljük meg, hogy a 12 \hat{g}_I operátor közül itt csak hármat használtunk. A többiekre teljesül, hogy

$$\{\hat{g}_I, \hat{g}_J\} = 2\eta_{IJ}\hat{1}, \quad \eta_{IJ} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad I, J = 1, \dots, 12, \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad (7.87)$$

Általánosan a \hat{g}_I , $I = 1, 2, \dots, N$ operátorok mátrix reprezentánsai a fizikában használatos gamma mátrixoknak felelnek meg (N, N) szignatúrájú téridőben. Emlékeztetünk arra is, hogy a

$$\hat{g} \equiv [\hat{n}_1, \hat{p}^1][\hat{n}_2, \hat{p}^2][\hat{n}_3, \hat{p}^3] \cdots [\hat{n}_N, \hat{p}^N] = (-1)^{N(N-1)/2} \hat{g}_1 \hat{g}_2 \hat{g}_3 \cdots \hat{g}_N \quad (7.88)$$

helicitás operátorra $\hat{g}^2 = \hat{1}$. Az operátor sajátértékei adják a fermionikus állapotok kiralitását.

A fenti szótár segítségével azonnal látszik, hogy a $V_{GH}[\psi]$ funkcionál matematikai szerkezete és variálása a szokásos a Freudenthal rendszereknél megismert (7.72)-(7.74) formulákat és a már megismert eredményeket adja.

Diszkutáljuk most a (7.86) leképezés fizikai jelentését az $X = T^6$ toroidális esetben! Először is hasonlítsuk össze a T^6 (7.77)-ből ismert páros kohomológiával kapcsolatos Hodge számait a

$$h^{3,0} = h^{0,3} = 1, \quad h^{1,0} = h^{0,1} = h^{3,2} = h^{2,3} = 3, \quad h^{2,1} = h^{1,2} = 9 \quad (7.89)$$

páratlan kohomológiával kapcsolatos Hodge számokkal. Láthatóan a két esetből összekombinált Hodge gyémánt az úgynevezett tükörszimmetriát illusztrálendő, szép szimmetrikus szerkezetű. Mivel a kohomológia a toroidális esetben összefonódottsággal kapcsolatos jelentéssel is rendelkezik felmerül a kérdés, hogyan jelenik meg a tükörszimmetria a fermionrendszerek szerkezetében?

Ehhez először fel kell idéznünk a qubitrendszerek beágyazásával kapcsolatos 3.2.3 fejezet végén tárgyalt ismereteinket. A hat egyrészecke állapot $(1, 2, 3, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3})$ módon történő indexelése egy betöltési számokkal kapcsolatos a $\mathbb{C}^6 \simeq \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$ izomorfizmuson alapuló képet sugall. Ebben a képben az első faktor három rácsponthoz, T^2 -t stb. a második faktor két lehetséges spinbeállást, homológia bázis elemet stb. jelent. Ekkor a ψ -vel kapcsolatos leírásmód olyan beágyazott (3.247) alakú 3-qubit rendszert tartalmaz melynek 8 bázisvektorát egyszeresen betöltött állapotok reprezentálják. A φ -vel kapcsolatos leírásmód pedig olyan beágyazott (3.246) alakú 3-qubit rendszert ír le melynek 8 bázisvektorát kétszeresen betöltött állapotok reprezentálják. Könnyen ellenőrizhető, hogy a (7.86) leképezés leszűkítése a (3.247) állapotra a (3.246) állapotot adja. Ennek a leképezésnek a leszűkítése tehát az egyszeres és a kétszeres betöltéseken alapuló reprezentációk között közlekedik. Ezek a 3-qubit alterek azonban a $Spin(12)$ csoport teljes 32 dimenziós \mathcal{F}_{\pm} ábrázolási tereinek csak egy részét adják. Megmutatható [5, 11, DF07b], hogy a fenti ábrázolási terek hat qubitből (A, B, C, D, E, F) kikevert 3-qubit alterek összegére bonthatók

$$\mathcal{F} = (V_{ACF} \oplus V_{ADE} \oplus V_{BCE} \oplus V_{BDF}) \oplus (V_{ACE} \oplus V_{ADF} \oplus V_{BCF} \oplus V_{BDE}) \quad (7.90)$$

ahol az első felbontás \mathcal{F}_+ -ra a második \mathcal{F}_- -ra vonatkozik³³. Az egyszeres (V_{ACE}) és a kétszeres (V_{BDF}) betöltéseken alapuló terek mellett a fennmaradó 3-qubit alterek vegyes betöltéseket tartalmaznak. Reprezentációelméleti szempontból a fenti dekompozíció a $Spin(12)$ csoport $SL(2)_A \times SL(2)_B \times SL(2)_C \times SL(2)_D \times SL(2)_E \times SL(2)_F$ részcsoporthoz tartozik

$$32_- \rightarrow (2, 1, 2, 1, 1, 2) \oplus (2, 1, 1, 2, 2, 1) \oplus (1, 2, 2, 1, 2, 1) \oplus (1, 2, 1, 2, 1, 2). \quad (7.91)$$

³³ $V_{ACF} = V_A \otimes V_C \otimes V_F$ stb. ahol a V_A, V_B, \dots terek \mathbb{C}^2 -k.

dekompozíciójával kapcsolatos³⁴. A 3-qubit SLOCC transzformációk a fermionállapotok egyszeres és kétszeres betöltésű alterein az 3.5.7 fejezetben tárgyalt módon hatnak. A vegyes betöltésekkel kapcsolatos 3-qubit SLOCC csoportok hatását illetően lásd a szerző és Frédéric Holweck dolgozatát [11].

A fenti összefonódottság elméleti megfigyelésekből következik, hogy az általánosított Hitchin funkcionális formalizmus négy STU rész-sektort rejt magába. Ez a húrelméleti formalizmusban az alábbi módon jelenik meg. Toroidális kompaktifikáció esetén a IIA húrelmélet $N = 8$ effektív szupergravitációra vezet $E_{7(7)}$ U-dualitási szimmetriával. Ennek az elméletnek konzisztens csonkítása az S és T-dualitásokat leíró $SL(2, \mathbb{R}) \times SO(6, 6)$ dualitási szimmetriával rendelkező $N = 4$ szupergravitáció. Az elmélet további csonkítását kapjuk, ha az $SO(6, 6)$ T-dualitási csoportot kiredukáljuk a $SL(2, \mathbb{R})^{\times 6}$ csoport szerint. A redukció eredménye pontosan a (7.90) első tényezőjére vezet. Ez négy darab STU-sektort szolgáltat, melyek négy konzisztens $N = 2$ szupergravitációs modellt ad. Láthatóan a csonkítások geometriáját a fermionikus összefonódottsággal kapcsolatos struktúrák segítségével elegáns módon megérthetjük. A tükörszimmetrián jelenséggel összhangban a releváns fizikai tereket a IIB képbe transzformálhatjuk ahol ismét négy STU sektort találunk.

7.7. Speciális holonómiájú sokaságok és hét módusú fermionrendszerek

Legyen most M egy hétdimenziós valós irányítható sokaság. Tekintsünk a sokaságon egy valós nemdegenerált \mathcal{P} háromformát! Ez azt jelenti, hogy a sokaság minden pontjában a (3.119) módon definiált $\mathcal{J}(\mathcal{P})$ invariáns nem zérus. Ez azt jelenti, hogy a sokaság ezen pontjához asszociált fermionikus állapot vagy (3.147) vagy (3.149) típusú GHZ-szerű összefonással rendelkezik. A \mathcal{P} formát a (3.117) alakba is írhatjuk. Innen látható, hogy a \mathcal{P} megadása ekvivalens a (P, ω) pár megadásával. A hét egyrészecske állapottal rendelkező háromfermion rendszerek kapcsán használt (3.112), (3.127) és (3.154) kovariánsok felhasználásával definiálhatjuk a szimmetrikus 7×7 -es g_{IJ} metrikus tenzort. Ennek a procedúrának az eredményeképp egy nemdegenerált (összefonódott) \mathcal{P} háromforma segítségével M -en egy $g_{\mathcal{P}}$ Riemann metrikát definiáltunk. Kérdés, az ilyen eljárással előállított metrikákkal ellátott hétdimenziós sokaságoknak milyen speciális tulajdonsága van?

Tekintsük a

$$V_{SH}[\mathcal{P}] = \int_M \mathcal{J}^{1/3}(\mathcal{P}) d^7x = \int_M \sqrt{\text{Det } g_{\mathcal{P}}} d^7x \quad (7.92)$$

funkcionált [Hit00]! A második egyenlőség mely a (3.128) összefüggésen alapul azt mutatja, hogy a funkcionál a $g_{\mathcal{P}}$ metrikára vett térfogat. A (3.164)-(3.165) összefüggések felhasználásával a funkcionál a

$$V_{SH}[\mathcal{P}] = \frac{1}{7} \int_M \mathcal{P} \wedge * \mathcal{P} \quad (7.93)$$

alternatív alakba is írható, ahol a $*$ Hodge féle csillag operációt a g_{IJ} metrika definiálja, $*\mathcal{P}$ explicit kifejezését illetően pedig lásd a (3.157) képletet.

A (3.134)-(3.135) egyenletek kapcsán tisztáztuk, hogy a $(GL(7, \mathbb{C}), \wedge^3 \mathbb{C}^7, \mathcal{R})$ hármas ahol \mathcal{R} a szokásos SLOCC hatással kapcsolatos ábrázolás, a prehomogén vektorterek egy újabb példáját szolgáltatja és a sűrű pálya reprezentánsát (3.132) adja. Az valós esetben két inekvivalens sűrű pálya van melyek reprezentánsai (3.147) és (3.149). Hitchint követve az (3.147) állapot pályáját pozitívnak fogjuk nevezni. Ennek következtében amennyiben \mathcal{P} egy zárt nemdegenerált valós pályához tartozó három-forma akkor a $V_{SH}[\mathcal{P}]$ funkcionál rögzített kohomológia osztályba eső kritikus pontjaira: $d * \mathcal{P} = 0$. Pozitív nemdegenerált zárt \mathcal{P} formák esetén ebből következik [Hit00], hogy a funkcionálunk kritikus pontjai speciális a G_2 holonómiájú $g_{\mathcal{P}}$ metrikák.

³⁴A 32+ ábrázolás dekompozíciója (7.90) első tényezőjéből értelemszerűen adódik.

Ezeket a speciális holonómiájú sokaságokat a 11 dimenziós M-elmélet négy dimenzióra történő kompaktifikációja során használják abból a célból, hogy a részecskefizika standard modelljének megfelelő fenomenológiát kapjanak [JHS07]. A Calabi-Yau sokaságokkal kapcsolatos topológikus hűrelméletek analógiájára G_2 holonómiájú sokaságokkal kapcsolatos ugynevezett topológikus M-elméletek is konstruálhatók [RSAC05]. A topológikus M-elmélet klasszikus effektív leírása a V_{SH} funkcionál segítségével történik. Megjegyezzük, hogy amennyiben az $\omega \wedge P = 0$ feltétel teljesül akkor a V_{SH} funkcionál alakja (3.125) következtében egy faktorizált alakra egyszerűsödik. Ebben az egyik invariáns egy hat dimenziós részsokaság szimplektikus a másik a komplex struktúrájával kapcsolatos. A két struktúra a topológikus M-elméletben nemperturbatív módon csatolódik. Ezen struktúrák csatolódását egy olyan (7.68)-hoz hasonló funkcionál integrál írja le melyben V_H -helyett V_{SH} szerepel. Az így definiált topológikus M-elmélet egy hurok korrekcióinak számolását a [dBdMESS08] dolgozatban végezték el.

Látjuk tehát, hogy akárcsak a Hichin funkcionálok esetén ebben az esetben is egy sokaság pontjaival parametrizált összefonódott fermionikus állapotok egyértelműen meghatározott összefonódottsági mértékei olyan funkcionálokat adnak melyek kritikus pontjai a sokaság speciális geometriai struktúrái. A jelen esetben hét dimenziós sokaság pontjaival parametrizált (3.133) tulajdonsággal rendelkező háromfermion állapotok az oktoniók automorfizmus csoportjával kapcsolatos speciális holonómiájú Riemann metrikákat indukálnak. A speciális holonómia struktúra bizonyos értelemben összefonja (lásd (3.117)) az előző fejezetekben megismert szimplektikus és komplex struktúrákat.

7.8. Összefoglalás

Az X sokaságra történő hűrelméleti kompaktifikációk során megjelenő effektív elméletek fekete lyuk megoldásai olyan entrópiaformulákat szolgáltatnak melyek Freudenthal rendszerekkel kapcsolatos összefonódottsági mértékeken alapulnak. A fekete lyuk megoldások horizonton előálló geometriája az X általánosított komplex struktúráinak geometriájával kapcsolatos. A IIB képből ezek a struktúrák X térfogatörző a IIA képből pedig a térfogatot megváltoztató deformációival kapcsolatosak (komplex illetve Kähler struktúrák). Ezeknek a struktúráknak a viselkedését Hitchin funkcionálok írják le. Ezen funkcionálokkal kapcsolatos struktúrák kritikus pontban felvett értékei a szemiklasszikus fekete lyuk entrópiát szolgáltatják. Egy Hitchin funkcionálokra alapuló funkcionálintegrálásos tárgyalásban lehetőségünk van arra is, hogy a szemiklasszikus entrópiához kvantumkorrekciókat számoljunk.

8. FEJEZET

 E_7 és hét-qubit három részrendszeres összefonódottsága

8.1. Motiváció

A hatdimenziós X sokaságokkal kapcsolatos Hitchin funkcionálok mindegyike a 4.1 táblázatban szereplő valamelyik Freudenthal rendszerrel kapcsolatos. Ezek a funkcionálok a Freudenthal rendszerek kvartikus invariánsának négyzetgyökeként állnak elő (Hitchin invariáns), s a velük kapcsolatos variációs probléma matematikai konzisztenciáját az garantálja, hogy ezen rendszerek mindegyike egy prehomogén vektorteret alkot s így a megfelelő SLOCC hatásra nézve léteznek sűrű pályáik.

A fenti Hitchin funkcionálok alapjául szolgáló Freudenthal rendszerek klasszikus mechanikai rendszerek. Valóban, mindegyik rendszer el van látva egy szimplektikus formával, egy kitüntetett megfigyelhető mennyiséggel (Hamilton függvény) mely a Hitchin invariánssal, egy Hamiltoni vektormezővel mely a (4.92) Freudenthal duálltal, és egy momentum leképezéssel (\mathcal{K}_φ) mely az általánosított majdnem komplex struktúrával kapcsolatos. Ezt a klasszikus mechanikai struktúrát a 4.1 táblázat negyedik sorában megjelenő Freudenthal rendszerre a (3.105)-(3.109) egyenletek illusztrálják.

A funkcionálok kritikus pontjai integrálható általánosított komplex struktúrákat adnak. Ha ezeket a funkcionálokat a húrelméleti fekete lyuk megoldások kontextusában tekintjük és a kritikus pontban kiértékeljük akkor a (7.79) képlet alapján a szemiklasszikus fekete lyuk entrópiát kapjuk. A speciális toroidális esetben a Freudenthal vektortér közvetlen összefonódottságelméleti interpretációval rendelkezik. A FLYQM kontextusában az $X = (T^2 \times T^2 \times T^2)_{\text{diag}}, T^2 \times T^2 \times T^2, T_{\text{szimpl}}^6, T_{\text{komplex}}^6, T_{\text{gen.komplex}}^6$ esetek a három bozonikus qubit, három qubit, három szimplektikus fermion hat módus, három fermion hat módus, páros vagy páratlan számú fermion hat módus esetének felelnek meg. Ekkor a fekete lyuk entrópia 4, 8, 14, 20, 32 valós amplitúdó (töltések) segítségével felírt állapotok összefonódottsági mértéke.

A 4.1 táblázat utolsó sorában szereplő oktoniósi Jordan algebrákon alapuló Freudenthal rendszer is egy prehomogén vektorteret alkot ezt az esetet azonban az összefonódottsággal kapcsolatos szép képbe még nem sikerült beillesztenünk. Formálisan használhatjuk a fenti struktúrákat egy funkcionál felírására, melynek variációs feladata ismét értelmes. A megfelelő funkcionál kritikus pontjainak vizsgálata az általánosított komplex struktúrák elméletének további általánosítására vezet. Ezt a húrelméleti irodalomban általánosított kivételes geometriának nevezik¹ mely aktív kutatási terület [Hul07, GLSW09, GO11]. Ebben az utolsó fejezetben az általánosított kivételes geometriával való kapcsolat tárgyalásától eltekintünk. Célunk csupán az alapvető húrelméleti kapcsolódási pontok és a funkcionál alapjául szolgáló kvartikus invariáns összefonódottság elméleti szerkezetének vizsgálata.

8.2. Az E_7 szimmetrikus entrópia formula

A korábbi vizsgálatainkból tudjuk, hogy a IIA elmélet T^6 -ra történő kompaktifikációja során az $N = 8$ szupergravitációt [CJ79, CJ78] kapjuk. Ennek az elméletnek is lehet tekinteni az

¹A "kivételes" szó mint látni fogjuk az E_7 kivételes Lie csoporttal kapcsolatos.

extremális gömbszimmetrikus fekete lyuk megoldásait melyeket 28 elektromos és 28 mágneses töltéssel jellemezhetünk. Az $E_{7(7)}$ invarianciával² rendelkező entrópiaformula [CJ79, KK96]

$$S = \pi \sqrt{|J_4|} \quad (8.1)$$

ahol

$$J_4 = -\text{Tr}(xy)^2 + \frac{1}{4}(\text{Tr } xy)^2 - 4(\text{Pf } x + \text{Pf } y) \quad (8.2)$$

és x, y 8×8 -as antiszimmetrikus mátrixok melyek a 28 elektromos és a 28 mágneses töltést tartalmazzák. A J_4 Cartan invariáns egy alternatív (Cremmer-Julia) alakja

$$J_4 = \text{Tr}(\mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}})^2 - \frac{1}{4}(\text{Tr } \mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}})^2 + 4(\text{Pf } \mathcal{Z} + \text{Pf } \overline{\mathcal{Z}}) \quad (8.3)$$

ahol a felülhúzás komplex konjugálást jelent

$$\text{Pf } \mathcal{Z} = \frac{1}{2^4 \cdot 4!} \epsilon^{ABCDEFGH} \mathcal{Z}_{AB} \mathcal{Z}_{CD} \mathcal{Z}_{EF} \mathcal{Z}_{GH} \quad (8.4)$$

és a komplex 8×8 -as \mathcal{Z} mátrix az $N = 8$ centrális töltés mátrix. A J_4 invariáns két alakja között a

$$\mathcal{Z}_{AB} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(x^{IJ} + iy_{IJ})(\Gamma^{IJ})_{AB} \quad (8.5)$$

reláció teremt kapcsolatot. Itt összegzés csak az $I < J$ esetben értendő, és $(\Gamma^{IJ})_{AB}$ az $SO(8)$ algebra algebra generátorai $I, J = 0, 1, \dots, 7$ vektor és $A, B = 0, 1, \dots, 7$ spinor indexekkel. Az $SO(8)$ trialitás miatt a vektor és spinor indexek közötti konverzió segítségével a fenti reláció invertálható. Az entrópiaformula Cartan-féle alakja azonnal látható $SO(8)$ a Cremmer-Julia alak pedig $SU(8)$ szimmetriával rendelkezik, az azonban nem triviális, hogy a tagok (8.2) illetve (8.3) kombinációja a bővebb az $N = 8$ szupergravitációt jellemző $E_{7(7)}$ szimmetriával is rendelkezik.

Legyen

$$x^{01} + iy_{01} = -\psi_7 - i\psi_0, \quad x^{34} + iy_{34} = \psi_1 + i\psi_6 \quad (8.6)$$

$$x^{26} + iy_{26} = \psi_2 + i\psi_5, \quad x^{57} + iy_{57} = \psi_4 + i\psi_3 \quad (8.7)$$

és az x, y fennmaradó komponensei zérusok. Ekkor rövid számolás mutatja, hogy $J_4 = -D(\psi)$ ahol $D(\psi)$ a (2.92)-ből ismerős Cayley hiperdetermináns³. Ez az eredmény [KL06] azt mutatja, hogy valószínűleg az $N = 2$ STU modell 8 töltéses esete az $N = 8$ modell 56 töltéses esetének konzisztens csonkítása által kapható.

Figyeljük meg azt is, hogy ezt az eredményt azonnal igazolhatjuk amennyiben megfigyeljük hogy az 56 töltéses eset természetes módon beágyazható [BDD⁺09c] a 4.1 táblázat utolsó sorának megfelelő Freudenthal rendszerbe amennyiben az ott szereplő komplexifikált októniós Jordan algebrába a valós októniók úgynevezett split változatát ágyazzuk be⁴. A (8.2) $E_{7(7)}$ invariáns ebben a képben épp a (4.85) $E_7(\mathbb{C})$ invariáns split októniókra történő leszűkítésének negatívja. Mivel ebbe a Freudenthal rendszerbe a három-qubit Freudenthal rendszere természetes módon beágyazódik ezért a fenti eredmény azonnal adódik. Felmerül a kérdés: megérthető-e ez az 56 töltéses Freudenthal rendszer mint egy speciális összefonódottsággal rendelkező qubit-rendszer?

²A nemkompakt $E_{7(7)}$ csoport Lie-algebrájának 133 a maximális kompakt alcsoportnak megfelelő $SU(8)$ algebrájának 63 generátora van. A fennmaradó nemkompakt generátorok száma tehát 70. A nemkompakt mínusz kompakt generátorok száma 7. Ez magyarázza az $E_{7(7)}$ jelölést. Az $E_{7(7)}$ csoport a komplex E_7 csoport nemkompakt valós alakja.

³(8.6) decimális indexeket a (2.92) bináris indexévé kell konvertálni.

⁴A split kompozíciós algebrákat illetően lásd 2.fejezet a 6. lábjegyzet.

8.3. Az októniós Freudenthal rendszer ciklikus realizációja

Az E_7 csoport fundamentális ábrázolása 56 dimenziós. Tekintettel azonban arra, hogy 56 nem áll elő 2 hatványaként ezért az októniós Freudenthal rendszert qubit állapotterek (\mathbb{C}^2) tenzorszorzataként biztos nem tudjuk előállítani. Azonban mivel $8 \times 7 = 56$ ezért elképzelhető, hogy az 56 dimenziós ábrázolási teret hét darab 8 dimenziós három-qubit altér direkt összegeként már fel tudjuk építeni. Továbbá, mivel E_7 rangja hét és az egy rangú $SL(2, \mathbb{C})$ SLOCC részcsoporth hét kópiája beágyazható ebbe a csoportba ezért azt várjuk, hogy az E_7 csoport $SL(2, \mathbb{C})^{\times 7}$ részcsoporth szerinti dekompozíciója megadja a kívánt struktúrát. Ez a konstrukció valóban keresztülvihető [DF07b, 5].

Tekintsük először a Duff és Ferrara által javasolt [DF07b] úgynevezett ciklikus konstrukciót! Az 56 dimenziós fundamentális E_7 ábrázolás releváns dekompozíciója

$$\begin{aligned} 56 \rightarrow & (2, 2, 1, 2, 1, 1, 1) + (1, 2, 2, 1, 2, 1, 1) + (1, 1, 2, 2, 1, 2, 1) + (1, 1, 1, 2, 2, 1, 2) \\ & + (2, 1, 1, 1, 2, 2, 1) + (1, 2, 1, 1, 1, 2, 2) + (2, 1, 2, 1, 1, 1, 2) \end{aligned} \quad (8.8)$$

A dekompozícióban szereplő 1 és 2 számok helyiértékeit jelöljük A, B, C, D, E, F, G -vel. Jelöljük ezek a számok rendre a hét $SL(2, \mathbb{C})$ csoport szinglet illetve dublet ábrázolásait. Ebben a képen tehát hét (A, B, C, D, E, F, G) qubit három részrendszeres összefonódottságáról beszélhetünk [DF07b]. A direkt összegek és a szingletek megjelenése zavaró. A konvencionális összefonódottságelméletben ilyen struktúrával ezidáig nem találkoztunk. A fenti struktúra lehetséges fizikai interpretációjának kérdésére még visszatérünk, egyelőre beérjük igen érdekes geometriájának a tanulmányozásával.

Írjunk a szingletek helyére 0-t a dubletek helyére 1-t! A direkt összegben szereplő tényezőket (háromqubit rendszerek) jeöljük (a, b, c, d, e, f, g) -vel! Tekintsük most az alábbi mátrixon alapuló megfelelést [7]

$$\begin{pmatrix} s/o & A & B & C & D & E & F & G \\ a & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ g & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{ABD} \\ b_{BCE} \\ c_{CDF} \\ d_{DEG} \\ e_{EFA} \\ f_{FGB} \\ g_{GAC} \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

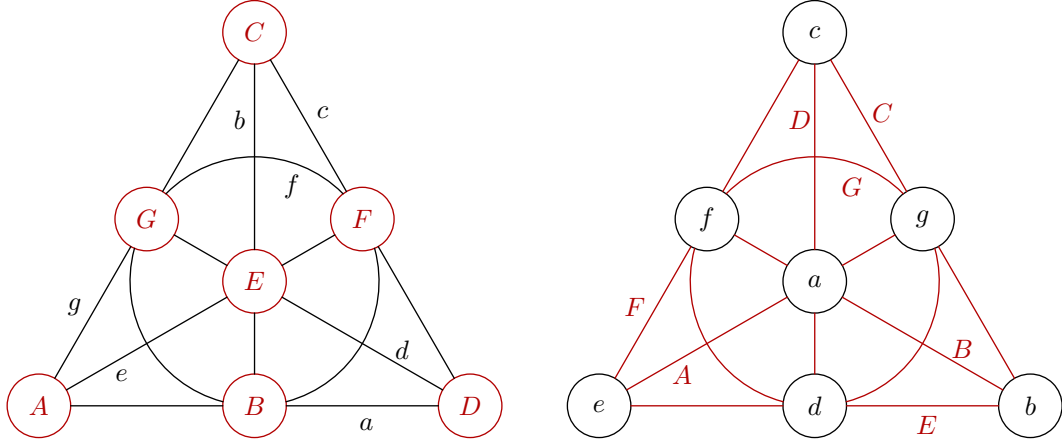
Ekkor a $V_{ijk} \equiv V_i \otimes V_j \otimes V_k$ ahol $i, j, k \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$ jelöléssel az 56 dimenziós \mathcal{H} E_7 ábrázolási teret az alábbi alakba írhatjuk

$$\mathcal{H} = V_{ABD} \oplus V_{BCE} \oplus V_{CDF} \oplus V_{DEG} \oplus V_{EFA} \oplus V_{FGB} \oplus V_{GAC} \quad (8.10)$$

ahol a tenzorszorzatban szereplő tényezők címkézését az 1101 kombináció ciklikus eltolására alapoztuk.

Könnyen belátható, hogy amennyiben a (8.9)-ban megjelenő mátrixot egy gráf incidenciamátrixának tekintjük akkor a kapott alakzat a 3.4.2 fejezetben már definiált úgynevezett Fano sík [5]. A Fano sík egy hét pontból (A, B, C, D, E, F, G) és hét egyenesből (a, b, c, d, e, f, g) álló elrendezés. Az egyeneseket az egymással illeszkedő (incidenciában lévő) pontok definiálják. Ezeket az 8.1 ábrán összekötöttük. Láthatóan minden egyenesen három pont található, és minden pont három egyeneshez tartozik. Nyilvánvaló, hogy a Fano sík kompakt módon összefoglalja az E_7 dekompozíciójának geometriáját.

A (8.2) képletben megjelenő 28 elektromos (x) és 28 mágneses (y) töltés és a hét darab 3-qubit rendszer 56 amplitúdója közötti kapcsolatot a Borsten és társai [BDD⁺09c] által meghatározott



8.1. ábra. A Fano sík és duálisa.

$$x^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -a_7 & -b_7 & -c_7 & -d_7 & -e_7 & -f_7 & -g_7 \\ a_7 & 0 & f_1 & d_4 & -c_2 & g_2 & -b_4 & -e_1 \\ b_7 & -f_1 & 0 & g_1 & e_4 & -d_2 & a_2 & -c_4 \\ c_7 & -d_4 & -g_1 & 0 & a_1 & f_4 & -e_2 & b_2 \\ d_7 & c_2 & -e_4 & -a_1 & 0 & b_1 & g_4 & -f_2 \\ e_7 & -g_2 & d_2 & -f_4 & -b_1 & 0 & c_1 & a_4 \\ f_7 & b_4 & -a_2 & e_2 & -g_4 & -c_1 & 0 & d_1 \\ g_7 & e_1 & c_4 & -b_2 & f_2 & -a_4 & -d_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

$$y^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 & -b_0 & -c_0 & -d_0 & -e_0 & -f_0 & -g_0 \\ a_0 & 0 & f_6 & d_3 & -c_5 & g_5 & -b_3 & -e_6 \\ b_0 & -f_6 & 0 & g_6 & e_3 & -d_5 & a_5 & -c_3 \\ c_0 & -d_3 & -g_6 & 0 & a_6 & f_3 & -e_5 & b_5 \\ d_0 & c_5 & -e_3 & -a_6 & 0 & b_6 & g_3 & -f_5 \\ e_0 & -g_5 & d_5 & -f_3 & -b_6 & 0 & c_6 & a_3 \\ f_0 & b_3 & -a_5 & e_5 & -g_3 & -c_6 & 0 & d_6 \\ g_0 & e_6 & c_3 & -b_5 & f_5 & -a_3 & -d_6 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

összefüggések adják meg. Megmutatható, hogy a fenti elrendezés szerkezete a 8.1 ábrán látható duális Fano sík szerkezetébe van kódolva[5, 7], mely az októniószorzás stuktúra konstansaiával kapcsolatos [BDD⁺09c]. Látható az is, hogy a (8.6) választás annak felel meg, hogy a (8.11)-(8.12) mátrixokban csak az "a"-val jelölt a_{ABD} három-qubit rendszert tartjuk meg. A fentiekből az is kiderül, hogy hét darab három-qubit szektorunk van melyek az $N = 8$ szupergravitáció hét $N = 2$ csonkításának, ezek pedig hét lehetséges STU modellnek felelnek meg. Ennek alapján, a jóval bonyolultabb $N = 8$ szupergravitáció felfogható úgyis, mint hét speciális módon "összevarrt" STU szupergravitáció.

8.4. U-dualitási szimmetria és kvantum kapuk.

Mint tudjuk a klasszikus $N = 8$ szupergravitáció Lagrange függvényéből [CJ78, CJ79] származtatott Euler-Lagrange egyenletek $E_{7(7)}$ szimmetriával rendelkeznek. Ezen a klasszikus szinten a töltések valós számok. A kvantálás után a töltések már egész számok és a megfelelő

szimmetria csoport az $E_7(\mathbb{Z})$ csoport lesz [HT95]. Ezt a végtelen diszkrét csoportot U-dualitási csoportnak nevezik. Az U-dualitási csoport hatása a Freudenthal rendszerek egész számok felett vett általánosítása segítségével írható le [Kru07]. Az U-dualitási csoport fizikai szempontból igen fontos véges részcsoportha az elektromos-mágneses dualitási csoport. Ez a csoport a Maxwell-féle elektrodinamikából ismert diszkrét véges \mathbb{Z}_2 csoport általánosításának tekinthető. Megmutatható [INV02], hogy esetünkben az elektromos-mágneses dualitási csoport az E_7 csoport Weyl csoportja: $W(E_7)$. A kvantum információelméletben először Planat és Solé hangsúlyozták, hogy a $W(E_7)$ csoport három-qubit kvantum kapukkal elegáns módon generálható [PS09]. A három-qubit rendszerek ismételt felbukkanásának oka az alábbi csoportelméleti izomorfizmus

$$W(E_7)/\mathbb{Z}_2 \simeq Sp(6, \mathbb{Z}_2) \quad (8.13)$$

ahol a jobb oldalon álló csoport olyan 6×6 -os szimplektikus mátrixokból áll melyeknek elemei a két elemű \mathbb{Z}_2 test elemei.

Ennek megértéséhez [VL10] tekintsük a valós 3-qubit Pauli csoportot! Ez a 128 elemmel rendelkező diszkrét csoport a $GL(8, \mathbb{R})$ csoport azon részcsoportha melyet a

$$(\pm I, \pm X, \pm Y, \pm Z) = (I, \sigma_x, i\sigma_y, \sigma_z) \quad (8.14)$$

Pauli mátrixok 3-szoros tenzorszorzatai generálnak. A 3-qubit Pauli csoport centrális kvóciensének egy $(V_3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ szimplektikus vektortér struktúra adható. Valóban legyen

$$I \mapsto (00), \quad X \mapsto (01), \quad Y \mapsto (11), \quad Z \mapsto 10 \quad (8.15)$$

akkor például az $X \otimes I \otimes Z$ 8×8 -as mátrixnak a (010010) hatkomponensű vektort feleltetjük meg. A fenti leképezés művelettartó amennyiben a mátrixszorzásnak a V_3 -ban az összeadást feleltetjük meg modulo 2. A centrális kvóciens képzés annak felel meg, hogy a csak előjelben különböző mátrixokat azonosítjuk. Így már egy izomorfizmust kapunk.

Egy $(a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3)$ és $(c_1 d_1 c_2 d_2 c_3 d_3)$ komponensekkel rendelkező $(p, q) \in V_3 \times V_3$ párosra legyen

$$\langle p, q \rangle = a_1 d_1 + b_1 c_1 + a_2 d_2 + b_2 c_2 + a_3 d_3 + b_3 c_3 \quad (8.16)$$

Megmutatható, hogy az így definiált \mathbb{Z}_2 értékű szimplektikus⁵ forma zérus ha a megfelelő 8×8 -as mátrixok kommutálnak, illetve egy ha antikommutálnak. Ezekkel a jelölésekkel

$$Sp(6, \mathbb{Z}_2) \equiv \{T \in M(6, \mathbb{Z}_2) | \langle Tp, Tq \rangle = \langle p, q \rangle\} \quad (8.17)$$

Megmutatható [CvG10], hogy az $Sp(6, \mathbb{Z}_2)$ csoportot a

$$T_q(p) = p + \langle p, q \rangle q, \quad q \in V_3 \quad (8.18)$$

alakú szimplektikus transzvektciók generálják.

Tekintsük most a valós Pauli csoportnak a $\pm I \otimes I \otimes I$ elemtől különböző elemeit. Ez a 126 elem 63 darab $(M, -M)$ 8×8 -as mátrix párokat tartalmazó halmazra bomlik⁶. Az E_7 csoport Lie algebrájának 133 generátorából 7 generátor a Cartan részalgebrába esik a fennmaradó 126 generátort $(E_\nu, E_{-\nu})$ alakú párokra bonthatjuk. Ezek a párok a Cartan dekompozíció 63 pozitív és 63 negatív $\pm \nu$ gyökvektorokkal indexelt léptető operátorainak felelnek meg. Megmutatható [CvG10] hogy az \mathbb{R}^7 -ben élő E_7 gyökrács és V_3 között megadható egy olyan π homomorfizmus mely az \mathbb{R}^7 szokásos skalárszorzatával és a V_3 szimplektikus formájával kompatibilis. Ez a homomorfizmus a gyökrács Weyl tükrözéseit a (8.18) transzvektcióknak felelteti meg. Mivel tetszőleges gyökvektorra $\pi(\alpha) = \pi(-\alpha)$ ezért az első homomorfizmus tétel felhasználásával következik a (8.13) izomorfizmus.

⁵A szokásos szimplektikus formák definíció szerint antiszimmetrikusak. A két elemű test felett $-1 \equiv 1 \pmod{2}$, ezért ekkor a szimplektikus forma szimmetrikus.

⁶Ez a 63 elemű halmaz (8.15) értelmében a \mathbb{Z}_2 feletti V_3 -ból képzett projektív tér 63 pontjának felel meg.

Tekintsük most a \mathcal{Z} centrális töltés mátrix (8.5) alakú kifejtését! Feleltessük meg a 28 darab $(\Gamma^{IJ})_{AB}$ antiszimmetrikus valós mátrixot a valós 3-qubit Pauli csoport antiszimmetrikus elemeinek⁷. Ekkor a V_3 -on ábrázolódó (8.18) transzvektciók generálta szimplektikus csoportthatást az

$$\mathcal{Z} \mapsto D(T)\mathcal{Z}D^{-1}(T), \quad T \in Sp(6, \mathbb{Z}_2) \quad (8.19)$$

elektromos-mágneses dualitást reprezentáló $W(E_7)$ ábrázolássá általánosíthatjuk [CvG10]. Az elmondottak alapján $D(T)$ -k három-qubit kvantum kapukként is felfoghatók.

Lássunk egy példát arra hogyan reprezentálhatunk egy nem triviális U-dualitási csoport transzformációt a kvantumszámításból ismert univerzális kvantumkapukkal! Az $Sp(6, \mathbb{Z}_2)$ csoportnak egy fontos részcsoportha a 168 elemmel rendelkező Klein csoport $SL(3, \mathbb{Z}_2) \simeq PSL_2(7)$ mely a Fano sík automorfizmus csoportja. Ennek a csoportnak létezik egy három generátoros (α, β, γ) prezentációja ahol az elemek rendje 7, 3, 2. Megmutatható [13], hogy mindhárom generátor egyszerűen előállítható a kvantumszámításból ismert két-qubit CNOT és egy-qubit fázis kapuk alkalmazásával.

Példaként tekintsük a hetedrendű α generátor előállítását [13]. Ehhez előbb tisztázzuk a CNOT kapuk jelentését. A CNOT operáció C_{12} alakú felírásában az 1-es qubit az úgynevezett kontroll qubit a 2-es qubit a target qubit. Amennyiben a kontroll qubit zérus akkor a target qubitet változatlanul hagyjuk, amennyiben a kontroll qubit egy a target qubitet megváltoztatjuk. Ez a CNOT operáció a 3-qubit állapottéren a $C_{12} \otimes I$ alakban hat. Hasonlóan értelmezhetjük a C_{13} , C_{21} stb. operációkat, ahol a második esetben a kontroll és target qubiteket felcseréljük. Egyszerűen belátható, hogy a CNOT operációk a megfelelő két qubit összefonódottságát megváltoztatják⁸.

Ezen előzmények után tekintsük az alábbi 8×8 -as mátrixot

$$D(\alpha) = (C_{12}C_{21})(C_{12}C_{31})C_{23}(C_{12}C_{31}) \quad (8.20)$$

ahol a felhasznált CNOT kapuk explicit alakja

$$C_{12} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

$$C_{23} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}, \quad C_{31} = \begin{pmatrix} E & 0 & F & 0 \\ 0 & E & 0 & F \\ F & 0 & E & 0 \\ 0 & F & 0 & E \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

ahol $2E = I + Z$, $2F = I - Z$. Megmutatható, hogy $D(a)^7 = I \otimes I \otimes I$ és $D^T(a) = D^{-1}(a)$ azaz a mátrix ortogonális.

Írjuk most a (8.5) centrális töltés mátrixot a $-4\sqrt{2}\mathcal{Z} \equiv \mathbf{Z}\Gamma$ alakba, ahol $\mathbf{Z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ egy 28 komponensű komplex vektor. Ekkor

$$D(\alpha)\mathbf{Z}\Gamma D^T(\alpha) = \mathbf{Z}'\Gamma, \quad \mathbf{Z}' = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{Z} \quad (8.23)$$

A fenti transzformáció és a (8.11)-(8.12) formulák alapján könnyen látható hogy az $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ transzformáció a háromqubit amplitúdók $(abcdefg) \mapsto (bcdefga)$ ciklikus permutációjának felel meg. Tehát a (8.20) kvantum kapukkal reprezentált 3-qubit transzformáció egy olyan

⁷Ezek azok az $A \otimes B \otimes C$ alakú 8×8 -as mátrixok melyek páratlan számú Y mátrixot tartalmaznak például $Y \otimes X \otimes I$ ilyen. Legyen $Q_0 : V_3 \mapsto \mathbb{Z}_2$ ahol $Q_0(v) \equiv a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Ekkor a $Q_0(v) = 1$ ($Q_0(v) = 0$) tulajdonságú vektorok antiszimmetrikus (szimmetrikus) 3-qubit Pauli mátrixok párjainak felelnek meg. A Q_0 a (8.16) szimplektikus formához asszociált egyik [VL10] kvadratikussá alakítható.

⁸Például a $|00\rangle + |10\rangle$ szeparálható állapotból C_{12} alkalmazásával az összefonódott $|00\rangle + |11\rangle$ Bell állapotot kapjuk.

U-dualitási transzformációnak felel meg mely az egyes STU szektorok töltéskonfigurációit ciklikusan egymásba forgatja.

Jelöljük a $v \in V_3$, $Q_0(v) = 1$ tulajdonságú vektorhoz⁹ asszociált antiszimmetrikus valós Pauli csoport elemet Γ_v -vel. Tehát például (11111)-hez $Y \otimes Y \otimes Y$ -t rendeljük. Ekkor belátható, hogy [CvG10]

$$D(T)\Gamma_v D^{-1}(T) = i^{f_T(v)} \Gamma_{Tv}, \quad v \in V_3, \quad T \in Sp(6, \mathbb{Z}_2) \quad (8.24)$$

ahol $f_M(v) \in \mathbb{Z}_4$. Ez azt jelenti, hogy a legáltalánosabb $W(E_7)$ transzformáció során a jobb oldalon megjelenő 28 Γ_v mátrix ± 1 és $\pm i$ faktorokat is felszedhet. Ennek eredményeképpen $(R(T))$ az elektromos töltések (x) mágneses töltésekbe (y) transzformálódhatnak és viszont. A (8.23) szabály azt is illusztrálja hogy míg a $D(T)$ ábrázolás a 28 antiszimmetrikus 3-qubit operátorokat transzformálja egymásba egy $\pm 1, \pm i$ faktor erejéig addig az $R(T)$ ábrázolás az 56 dimenziós vektortér állapotvektorait transzformálja. Az előbbi egyetlen 3-qubit rendszerrel az utóbbi a (8.10) szerkezetű 7-qubit rendszerrel kapcsolatos. Nyilván a (8.2) kvartikus invariánsan alapuló fekete lyuk entrópia $W(E_7)$ azaz elektromos-mágneses dualitás invariáns [Coo95]. Több is mondható: a fenti kvartikus invariáns az egyetlen $W(E_7)$ invariáns kvartikus forma melynek leszűkítése a hét STU szektorra a Cayley hiperdeterminánst adja [Man06].

8.5. Az októniós Freudenthal rendszer Hamming kódos realizációja

Ebben a fejezetben a hét-qubit három részrendszeres összefonódottságának egy alternatív a Hamming kódon alapuló változatát mutatjuk be [5, 7]. A kiindulópont a (2.135) 3-qubit diszkrét Fourier transzformáció mátrixának szerkezete

$$H \otimes H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.25)$$

Hagyjuk el a fenti mátrix első oszlopát és helyettesítsünk a fennmaradó 8×7 -es mátrixban a -1 -ek helyére 0 -t. Majd tekintsük ezzel együtt ennek a mátrixnak a komplementumát (0 és 1 szerepe felcserélve). Kapjuk

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.26)$$

Fogjuk fel ennek a két mátrixnak a 16 sorát úgy mint egy négybites üzenetet kódoló hétbites hibajavító kód kódszavait! Vegyük például a $(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ kódszót! A vastagon szedett biteket kontroll-biteknek a fennmaradókat pedig üzenet-biteknek fogjuk hívni. Példánkban az üzenet-bitek (0010) a kontroll-bitek pedig (011).

Tegyük most fel, hogy tetszőleges négybites üzenetünket egy olyan zajos csatornán szeretnénk átküldeni melyről tudjuk, hogy az maximum egy bit-flip hibát okozhat. Első lépésként az üzenetet

⁹Lásd a (7) lábjegyzetet.

a fenti két mátrix segítségével egy hétbites kódszóba ágyazzuk. Ezt megtehetjük, hiszen a fenti két mátrix valamelyik sorában mind a 16 lehetséges 4-bites üzenet pontosan egyszer bukkan fel. A fogadó fél miután megkapta mind a hét bitet, szeretné tudni vajon az üzenet hibás-e avagy sem. Amennyiben hibás volt szeretné a hibát egyértelműen kijavítani.

Ezt a feladatot a fogadó fél valóban meg tudja oldani. Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy bármely két kódszó legalább három bitben különbözik. Ha két kódszó Hamming távolságát úgy definiáljuk mint azon jegyek számát melynek bitjei különböznek akkor ez azt jelenti hogy a kódszavak egymástól vett Hamming távolsága legalább 3. Egyetlen bit hiba esetén a hibás hét bites sorozat az eredeti üzenetet tartalmazó hétbites kódszóhoz közelebb lesz mint bármelyik más hét bites kódszóhoz. A fogadó félnek tehát csak azt kell megállapítania, hogy a kapott hétbites sorozat a kódszavak listáján melyik kódszóhoz van a legközelebb.

A dekódolás folyamatát az alábbi módon formalizálhatjuk. Vezessük be a \mathbf{H} paritás ellenőrző mátrixot

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

Figyeljük meg, hogy \mathbf{H} oszlopai az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok bináris előállítását adják. Ha \mathbf{w} a 16 kódszó bármelyikét jelenti oszlopvektor alakba írva akkor $\mathbf{H}\mathbf{w} = 0$. Ha az \mathbf{e} hibavektor most az az oszlopvektor melynek k -dik sora 1 a többi eleme zérus, akkor a $\mathbf{H}(\mathbf{w} + \mathbf{e}) = \mathbf{H}\mathbf{e}$ vektor épp a k szám bináris előállítását adja. A \mathbf{H} alkalmazása tehát megmondja a címzetnek melyik bitet kell visszabillentenie ahhoz hogy az üzenetet tartalmazó helyes kódszót kapjuk. A most bemutatott klasszikus hibajavító kód a jólismert (7, 4, 3) Hamming kód. A számok jelentése sorrendben: a kódszó bitjeinek száma, az üzenet bitjeinek száma, a kódszavak minimális Hamming távolsága.

Használjuk most fel az első mátrix nem triviális kódszavait arra, hogy hét darab qubit állapotteréből egy 56 dimenziós vektorteret építsünk fel! A (8.9) ciklikus realizációnál megismert módszert használjuk

$$\begin{pmatrix} s/o & A & B & C & D & E & F & G \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ f & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ g & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{BDF} \\ b_{ADE} \\ c_{CDG} \\ d_{ABC} \\ e_{BEG} \\ f_{AFG} \\ g_{CEF} \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

Ez az új címkézési konvenció a 8.2 ábrán látható Fano sík segítségével foglalható össze.

Címkézzük a 3-qubit altereket binárisan: \mathcal{H}_σ , $\sigma \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 - (000)$ ahol

$$(\mathcal{H}_{001}, \mathcal{H}_{010}, \dots, \mathcal{H}_{111}) \leftrightarrow (V_{BDF}, V_{ADE}, \dots, V_{CEF}).$$

Az E_7 csoport 56 dimenziós fundamentális ábrázolási terét úgy kapjuk, hogy ezeket a \mathcal{H}_σ tereket a fordított bináris címkézésnek megfelelően rendezzük sorba:

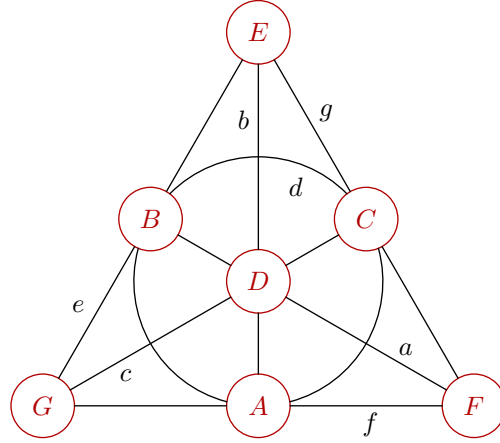
$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \rightarrow ((100), (010), (110), (001), (101), (011), (111)) \quad (8.29)$$

azaz

$$\mathcal{H} = V_{ABC} \oplus V_{ADE} \oplus V_{AFG} \oplus V_{BDF} \oplus V_{BEG} \oplus V_{CDG} \oplus V_{CEF} \quad (8.30)$$

Tekintsük most a (8.26)-ben szereplő második mátrix nemtriviális kódszavait. Mindegyik kódszó négy 1-est tartalmaz ezért egy (8.28)-szerű incidenciatráktúra 4-qubit alterek direkt összegét eredményezi. Valóban, tekintsük a

$$W \equiv V_{DEFG} \oplus V_{BCFG} \oplus V_{BCDE} \oplus V_{ACEG} \oplus V_{ACDF} \oplus V_{ABEF} \oplus V_{ABDG} \quad (8.31)$$



8.2. ábra. A Fano sík Hamming kódos címkézése.

4-qubit alterek direkt összegeként előálló 112 dimenziós vektorteret. Az itt megjelenő 4-qubit alterek a 8.2 ábra alapján a Fano sík egyeneseinek komplementumaival (négyszögek) állnak bi-jektív kapcsolatban. Valóban a W és a (8.30)-beli \mathcal{H} vektorterek összehasonlításából ez azonnal látható. A Fano sík mind a hét négyszöge két pontban metszi egymást. Sőt a metszet elhagyása után kapott négy pont is egy négyszöget ad. Például $ACEG$ és $BCFG$ metszete CG s így a fennmaradó pontok a Fano sík $ABEF$ négyszögét adják. Legyen $|ACEG\rangle, A, C, E, G = 0, 1$ a 16 darab kanonikus 4-qubit bázisvektor $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -ben. Jelöljük ezeket az egyszerűség kedvéért a T_{ACEG} -vel és tekintsük őket egy Lie-algebra generátorainak. A Fano sík négyszögeinek fenti tulajdonságai miatt definiáljuk a megfelelő kommutátorokat a

$$[T_{ACEG}, T_{BC'FG'}] = \Phi(ACEG, BC'FG') \varepsilon_{CC'} \varepsilon_{GG'} T_{ABEF} \quad (8.32)$$

módon ahol a $\Phi(ACEG, BC'FG')$ struktúra konstansok szerkezete tisztázásra szorul. Nyilván mivel hét darab ilyen négy qubit rendszer lehetséges ezért a további 21 lehetséges kommutátor is hasonló szerkezetű. Már csak a $[T_{ACEG}, T_{A'C'E'G'}]$ jellegű kommutátorok szorulnak tisztázásra. Ezek azonban (2.179) harmadik kommutátorának a szerkezetét mutatják. A kommutátor explicit alakját megtalálhatjuk a [5] dolgozatban.

A hét qubittel (A, B, C, D, E, F, G) kapcsolatos hét darab $\mathcal{W}_{000} \equiv sl(2)_A \oplus sl(2)_B \oplus \dots \oplus sl(2)_G$ Lie algebra a qubiteken infinitezimális SLOCC transzformációk útján hat¹⁰. Az \mathcal{W}_{000} tér egy $3 \times 7 = 21$ dimenziós vektortér. Ezt kombinálva a 112 dimenziós W térrel a kapott $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{000} \oplus W$ vektortér 133 dimenziós. Definiáljunk a \mathcal{W} téren egy Lie algebra struktúrát az alábbi módon. A \mathcal{W}_{000} részen a kommutátort az $sl(2)$ Lie-algebrák automatikusan generálják. A W részen a kommutátort definiáljuk a (8.32) kapcsán megismert definíciók segítségével. A \mathcal{W}_{000} -beli generátorok W -beli generátorokkal vett kommutátorát definiáljuk azáltal, hogy a megfelelő $sl(2)$ generátorok a megfelelő qubit indexeken SLOCC transzformációk útján hatnak. Hasonló eljárással 4-qubit rendszerekre már találkoztunk a (2.182)-(2.185) egyenletek kapcsán. A fenti konstrukció részleteit megtalálhatjuk a matematikai irodalomban [Man06, Eld04] illetve a FLYQM-re alkalmazva a [5, 7] munkákban. A konstrukció eredménye [Man06, Eld04]

$$e_7 = (\mathcal{W}, [\quad]) \quad (8.33)$$

¹⁰A \mathcal{W}_{000} jelölés kényelmes, hiszen amennyiben a (8.31)-ben megjelenő W -beli altereket rendre $\mathcal{W}_{001}, \dots, \mathcal{W}_{111}$ módon jelöljük akkor a későbbiekben a (8.33)-ben megjelenő 133 dimenziós \mathcal{W} az $\oplus_{ijk} \mathcal{W}_{ijk}$ alakba írható ahol $i, j, k \in \{0, 1\}$.

azaz a \mathcal{W} vektortér a fenti kommutátorral ellátva az e_7 Lie-algebrát adja amennyiben a $\Phi(\cdot, \cdot)$ konstansok a split októniószorzás struktúra konstansai. Ezeket természetesen a Hamming kód segítségével is definiálhatjuk. Ebben a képen e_7 egy októniós gradálással rendelkező 133 dimenziós vektortér [Man06, Eld04].

8.6. Az E_7 szimmetrikus fekete lyuk entrópiaformula szerkezete

A (8.30) dekompozíció miatt a (8.1) E_7 szimmetrikus entrópiaformulával kapcsolatos 56 dimenziós ábrázolást hét darab 3-qubit rendszer speciális kombinációjának is felfoghatjuk. Nézzük meg mit tanulhatunk ebből az új, qubitokon alapuló szemléletből. Fejezzük ki az entrópiaformulával kapcsolatos J_4 invariánst az (a, b, c, d, e, f, g) 3-qubit amplitúdókkal! Kapjuk, hogy [DF07b, 5]

$$\begin{aligned} J_4 = & \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + f^4 + g^4) + \\ & 2[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2e^2 + e^2f^2 + f^2g^2 + g^2a^2 + \\ & a^2c^2 + b^2d^2 + c^2e^2 + d^2f^2 + e^2g^2 + f^2a^2 + g^2b^2 + \\ & a^2d^2 + b^2e^2 + c^2f^2 + d^2g^2 + e^2a^2 + f^2b^2 + g^2c^2] \\ & + 8[aceg + bcfg + abef + defg + acdf + bcde + abdg], \end{aligned} \quad (8.34)$$

ahol például

$$bcde = \varepsilon^{A_1 A_3} \varepsilon^{B_3 B_4} \varepsilon^{C_2 C_3} \varepsilon^{D_1 D_2} \varepsilon^{E_1 E_4} \varepsilon^{G_2 G_4} b_{A_1 D_1 E_1} c_{C_2 D_2 G_2} d_{A_3 B_3 C_3} e_{B_4 E_4 G_4}.$$

$$d^2b^2 \equiv \mathcal{Q}(d, b) = \varepsilon^{A_1 A_3} \varepsilon^{B_1 B_2} \varepsilon^{C_1 C_2} \varepsilon^{A_2 A_4} \varepsilon^{D_3 D_4} \varepsilon^{E_3 E_4} d_{A_1 B_1 C_1} d_{A_2 B_2 C_2} b_{A_3 D_3 E_3} b_{A_4 D_4 E_4}.$$

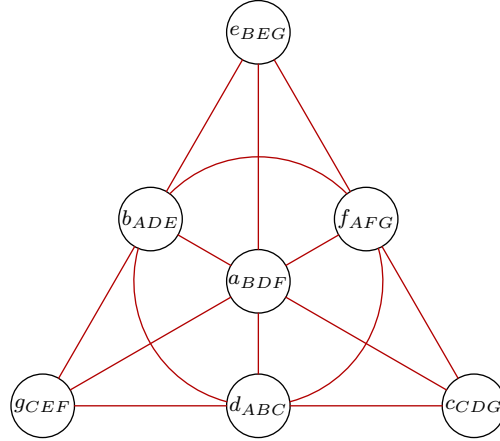
Ezzel a jelöléssel

$$d^4 \equiv \mathcal{Q}(d, d) = -2D(d) \quad (8.35)$$

ahol $D(d)$ a (2.92) Cayley hiperdetermináns.

Az első fontos felismerés amit ebből a formulából tanulhatunk az az, hogy a formula szerkezete a Hamming kódra alapuló duális Fano sík szerkezetébe van kódolva [5]. Mint tudjuk a Fano sík egy projektív sík a két elemű test felett, ezért használhatjuk a projektív dualitás eszméjét egy új Fano sík létrehozásához. A duális Fano síkban az egyenesek és pontok szerepét felcseréljük. A kapott elrendezés a (8.3) ábrán látható. A Fano sík pontjait qubitek egyeneseit 3-qubit állapotok, a duális Fano sík pontjait 3-qubit állapotok egyeneseit qubitok címkézik. A duális Fano sík illeszkedési relációja az, hogy az egy egyenesre illeszkedő 3-qubit rendszerekre az egyeneseket címkéző qubitok közősek. Például a (8.3) ábrán az egy egyenesen lévő d, b, f amplitúdók közös qubitje az "A"-val jelölt qubit, hiszen a Hamming kódra alapuló (8.28) konvenció alapján a fenti amplitúdók qubitjei rendre (ABC, ADE, AFG) .

A (8.34) formula hét a^4, \dots, g^4 jellegű tagjai a duális Fano sík hét pontjának fellenek meg. Ezek a hét lehetséges 3-qubit rendszer összefonódottsági mértékeivel kapcsolatosak. A J_4 invariánsban jelen lévő ilyen típusú összefonódottság tehát a duális Fano sík **pontjaival** kapcsolatos. A duális Fano síknak hét egyenese van. Minden egyenessel három amplitúdó kapcsolatos (például d, b, f), ezekkel pedig a J_4 invariáns $d^2b^2 + b^2f^2 + f^2d^2$ jellegű tagjai. Összesen hét ilyen tag van, ez tehát kiadja a J_4 mind a 21 ilyen jellegű tagját. A három darab 3-qubit rendszer párosításokon alapuló ilyen típusú "összefonódottsága" tehát a duális Fano sík **egyeneseivel** kapcsolatos. Végezetül az egyenesek komplementumai ("négyszögek") négy darab 3-qubit rendszer kapcsolataira utalnak. Mivel hét négyszögünk van ez kiadja a J_4 invariáns fennmaradó hét tagját melyek "összefonódottsága" duális Fano sík **négyszögeivel** kapcsolatos.



8.3. ábra. A duális Fano sík. Pontjait 3-qubit állapotok, egyeneseit qubitok címkézik. Egy egyenesre illeszkedő 3-qubit rendszerekre az egyeneseket címkéző qubitok közösek.

Az E_7 szimmetrikus entrópiformula Fano síkon és a Hamming kódra alapuló leírásának hasznosságára tekintsünk most egy másik példát. Ehhez vegyük szemügyre az $E_{7(7)}$ fundamentális ábrázolásának a maximális $SL(2) \times SO(6,6)$ részcsoporthoz tartozó

$$\mathbf{56} \rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{12}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{32}) \quad (8.36)$$

dekompozícióját! A (8.30) \mathcal{H} ábrázolási tér $(\mathbf{2}, \mathbf{12})$ részéhez tartozó amplitúdók

$$\begin{pmatrix} d_{ABC} \\ b_{ADE} \\ f_{AFG} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{(\mathbf{2}, \mathbf{12})} \equiv V_{ABC} \oplus V_{ADE} \oplus V_{AFG} = V_A \otimes (V_{BC} \oplus V_{DE} \oplus V_{FG}) \quad (8.37)$$

a $(\mathbf{1}, \mathbf{32})$ részéhez tartozók pedig

$$\begin{pmatrix} a_{BDF} \\ e_{BEG} \\ c_{CDG} \\ g_{CEF} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{(\mathbf{1}, \mathbf{32})} \equiv V_{BDF} \oplus V_{BEG} \oplus V_{CDG} \oplus V_{CEF} \quad (8.38)$$

Látható, hogy a $(\mathbf{2}, \mathbf{12})$ altér azokkal az amplitúdókkal kapcsolatos melyek egy közös qubitot (A) tartalmaznak az $(\mathbf{1}, \mathbf{32})$ altér pedig azokkal melyek pont ezt a qubitot nem tartalmazzák.

Figyeljük meg, hogy amennyiben az ábrázolási terünket a

$$V_{ADE} \oplus V_A \otimes (V_{BC} \oplus V_{FG}) \oplus V_D \otimes (V_{BF} \oplus V_{CG}) \oplus V_E \otimes (V_{BG} \oplus V_{CF}) \quad (8.39)$$

alakba írjuk akkor könnyen megérthetjük az irodalomból jólismert $SL(2) \times SL(2) \times SL(2) \times SO(4,4) \subset SL(2) \times SO(6,6)$ részcsoporthoz tartozó

$$(\mathbf{2}, \mathbf{12}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{32}) \rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8}_v) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{8}_s) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{8}_c) \quad (8.40)$$

dekompozíció struktúráját is. Az $SO(4,4)$ csoport összefonódottság elméleti jelentőségét a 4-qubit rendszerek kapcsán már jól ismerjük. Valóban, komplex amplitúdók esetén az $SO(4,4)$ komplexifikáltját adó $SO(8, \mathbb{C})$ csoport trialitása miatt a $8_v, 8_s$ és 8_c vektor spinor és konjugált spinor ábrázolások összekapcsolódnak a 4-qubit rendszerek permutációs tulajdonságaival. Ez legegyszerűbben a (2.182) reprezentációból látható. Amennyiben az ott található \mathcal{L} mátrixot kicseréljük a (2.153) qubit permutációkkal kapott mátrixokkal, akkor pontosan a trialitásnak

megfelelő ábrázolásokat kapjuk. Az E_7 csonkítások esetében a (8.40) dekompozíciót hét különböző módon végezhetjük el annak megfelelően, hogy a Fano sík négyszögeinek megfelelően hét különböző 4-qubit állapotteret keverhetünk ki. Ez a megfigyelés mely először a [5] munkában jelent meg a 4-qubit rendszerek és az STU-modell 6. fejezetben tárgyalt (6.84)-en alapuló kapcsolatára irányította a figyelmet.

A (2, 12) csonkítás FLYQM-beli jelentősége az alábbi. Ebben az esetben a megfelelő szupergravitációs modell szimmetriacsoportja klasszikusan $SL(2, \mathbb{R}) \times SO(6, 6)$. Az Abeli mértékterek indukálta töltések száma $2 \times 12 = 24$. Kvantálás után ezek a töltések egész számok és a diszkrét U-dualitási csoport az $SL(2, \mathbb{Z}) \times SO(6, 6, \mathbb{Z})$ csoport lesz. Ezek a csoportok a toroidálisan kompaktifikált húrelméletek S és T-dualitási transzformációit generálják [HT95]. A megfelelő fekete-lyuk megoldások entrópiaformulái a (8.34) formula 24 töltéses csonkításai lesznek. A duális Fano sík szerkezet miatt ezeket a csonkításokat hétféleképpen lehet elvégezni. Valóban, a 8.3 ábra alapján a 24 töltéses csonkítások szerkezete azonnal látható.

Illusztrációképp tekintsünk egy ilyen lehetséges csonkítást mely a 8.3 ábra dbf egyenesén alapul! A (8.34) formula csonkításával kapcsolatos (2.91)-szerű összefonódottsági mértékünket jelöljük az alábbi módon

$$\tau_3^{(3)} = 2|b^4 + d^4 + f^4 + 2(b^2d^2 + d^2f^2 + b^2f^2)| \quad (8.41)$$

ahol $\tau_3^{(3)}$ jelölés most arra utal, hogy a fenti formula három darab három részrendszeres állapot amplitúdóit tartalmazza. Vezessünk be egy a fenti egyenessel kapcsolatos töltésállapotot az alábbi módon

$$|\psi\rangle = \sum_{ABCDEFG=0,1} |A\rangle \otimes (d_{ABC}|BC\rangle + b_{ADE}|DE\rangle + f_{AFG}|FG\rangle) \quad (8.42)$$

Mivel ezen az állapoton az $SL(2) \times SO(6, 6)$ csoport hat ezért írható, hogy

$$|\psi\rangle = \sum_{A\mu} \psi_{A\mu} |A\rangle \otimes |\mu\rangle, \quad A = 0, 1, \quad \mu = 1, 2, \dots, 12. \quad (8.43)$$

Vezessük be a

$$p^\mu \equiv \psi_{0\mu} = \begin{pmatrix} d_{0BC} \\ b_{0DE} \\ f_{0FG} \end{pmatrix}, \quad q^\mu \equiv \psi_{1\mu} = \begin{pmatrix} d_{1BC} \\ b_{1DE} \\ f_{1FG} \end{pmatrix}. \quad (8.44)$$

jelölést! Ekkor

$$\tau_3^{(3)} = 4|(\mathbf{p}\mathbf{p})(\mathbf{q}\mathbf{q}) - (\mathbf{p}\mathbf{q})^2| \quad (8.45)$$

ahol a skalárszorzatok egy olyan 12×12 -es blokkdiagonális metrikus mátrix szerint értendők ahol mindhárom 4×4 -es blokkot az $\varepsilon \otimes \varepsilon$ mátrix adja. A fenti összefonódottsági mértékkel az $N = 4$ $SL(2, \mathbb{Z}) \times SO(6, 6, \mathbb{Z})$ szimmetrikus fekete lyuk entrópia a [CcvT96]-ból ismert

$$S = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tau_3^{(3)}} \quad (8.46)$$

alakba írható. Az $N = 8$ szupergravitáció ezen 24 töltéses szektorát NS-NS szektornak is szokták nevezni¹¹.

Megjegyezzük, hogy a fenti entrópiaformula a (8.11)-(8.12) ciklikus reprezentációban felírható egy olyan három-qubit állapot (2.91) hármas összefonásaként is melynek amplitúdói képzetes kvaterniók [BDD⁺09c]. Valóban egy képzetes kvaterniónak három független komponense van, s így egyetlen háromqubit állapotra pontosan $3 \times 8 = 24$ független valós számot kapunk. Összefonódottság elméleti szempontból ez a megközelítés a (8.37) dekompozícióban szereplő zavaró direkt összegek értelmezésének problémáját a $\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{H}^2$ három képzetes kvaterniós bit értelmezésének problémájával helyettesíti.

¹¹Neveu-Schwartz szektor.

Tekintsük most a (8.38) felbontást mely a (8.37) felbontás komplementuma. Ez az eset az 56 dimenziós ábrázolási tér 32 dimenziós alterével kapcsolatos. Az $N = 8$ szupergravitáció megfelelő csonkítása az úgynevezett RR szektor¹². Ennek a szektornak a fizikai jelentését az általánosított Hitchin funkcionál diszkussziója kapcsán már megbeszéltük[15]. Valóban, amennyiben a (8.38) felbontásban elvégezzük az $(ECAG)$ permutációt, akkor a kapott illeszkedési struktúra pontosan a (7.90) első tagjának megfelelő \mathcal{F}_+ fermionikus Fock tér illeszkedési struktúráját szolgáltatja. Ez azt jelenti, hogy amennyiben egy megfelelően átcimkézett Fano síkot használunk akkor a (8.34) invariáns RR -szektorra történő csonkításakor kapott $SO(6,6)$ invariáns pontosan a (7.81) általánosított Hitchin funkcionál alapjául szolgáló invariánst adja. A RR -csonkítás töltésállapotai tehát hat módusú páros vagy páratlan kiralitású fermionrendszerek állapotaiként interpretálhatók. A releváns általánosított SLOCC részcsoport a jólismert $Spin(12, \mathbb{C})$ csoport valós alakja: az $SO(6,6)$ csoport. Fejezetünk fő eredménye az, hogy ezeket az általánosított Hitchin invariánssal kapcsolatos fermionrendszereket hat qubit speciális (8.38) alakú kombinációként is kezelhetjük. Qubitrendszerek fermionrendszerekbe történő beágyazásainak hasonló szellemben történő vizsgálata a [11] dolgozatban található.

8.7. Összefoglalás

Az egyszerű összefonódott rendszerek közül különösen fontosak azok, melyek geometriai tulajdonságait a 4.1 táblázatban összefoglalt Freudenthal rendszerek írják le. Ebben a fejezetben a dolgozatban ezidáig tisztázatlan, a táblázat utolsó sorában kérdőjellel jelölt összefonódottsági típust vizsgáltuk. Mivel ez az eset az oktoniós Jordan algebrákkal kapcsolatos, ezért az oktoniók nem asszociativitása miatt ezeknek a rendszereknek a hagyományos összefonódottság elméleti interpretációja nem lehetséges. Ez azt jelenti, hogy létezik ugyan a megfelelő állapottér megértéséhez egy fizikai szempontból hasznos két qubites (8.30) kép, azonban ez a qubites dekompozíció tenzor szorzatokon kívül direkt összegeket is tartalmaz. A FLYQM szellemében azonban a direkt összegek interpretációja kézenfekvő. A direkt összeg hét tagja hét szuperszelekciós szektorként interpretálható, mely az $N = 8$ elmélet hét lehetséges $N = 2$ STU csonkításának felel meg. Az irodalomban először a [5] dolgozatban javasolt Fano síkon alapuló képből ez a csonkítás a Fano sík hét pontjának felel meg. Amennyiben a Fano sík egyeneseit illetve ezek komplementumait tartjuk meg, további fizikai szempontból releváns csonkításokat kapunk. Az egyenesek esetén a 24 amplitúdós (8.37) csonkítás (8.45) összefonódottsági mértéke az $N = 4$ elmélet entrópiaformulájával kapcsolatos, mely a képzetes oktoniók felett vett három-qubit rendszerek hármas összefonódásaként is interpretálható. Az egyenesek komplementuma esetén a 32 amplitúdós (8.38) csonkítás összefonódottsági mértéke a (7.81) általánosított Hitchin funkcionálon keresztül a megfelelő (7.79) entrópiaformulát adja [15]. Ez a csonkítás hat módusú páros, vagy páratlan kiralitású fermionrendszerekkel kapcsolatos.

A fejezetben tárgyalt $N = 8$ elmélettel kapcsolatos összefonódott rendszer az elmélet U-dualitási csoportjának hatását elegáns módon írja le. A dualitási transzformációk (8.30) állapotterén történő hatását lásd a [5] munkában. A transzformációk a megfelelő 3-qubit altereken illetve ezek között hatnak. Ennek az U-dualitási csoport hatásnak létezik egy egyetlen három-qubit állapottéren alapuló leírása is mely a (8.23) alakú transzformációs szabályon alapul. Különösen érdekes a végtelen diszkrét U-dualitási csoport véges elektromos-mágneses $W(E_7)$ részcsoportjának a hatása. Ebben az esetben az egyes generátorok hatását a Fano sík automorfizmus csoportja segítségével szemléltethetjük. Például a (8.23) módon ható hetedrendű elem a Fano sík pontjait, és ennek megfelelően a hét STU szektort ciklikusan forgatja. Ezt a generátort egyetlen 3-qubit állapottéren összefonódottságot generáló CNOT kapukkal a (8.20) alakban írhatjuk fel.

¹²Ramond-Ramond szektor.

Végezetül rámutattunk arra, hogy az E_7 csoport szerkezetén alapuló U-dualitási transzformációk a klasszikus Hamming kóddal állnak mély kapcsolatban. Itt emlékeztetünk arra, hogy az 5.7.4 fejezetben az STU csonkítás esetén a modell BPS és nem BPS extrémális megoldásainak vizsgálatára egy a hibajavító kódok formalizmusán (bit és fázis flip hibák korrigálásán) alapuló leírást javasoltunk. Ennek alapján kézenfekvő feltételezni, hogy ezt a leírásmódot a teljes $N = 8$ elméletre a Hamming kód kvantumos általánosításának [NC00] megfelelő implementálásával kell alkalmazni.

A hibajavító kódok és az U-dualitási transzformációk kvantum kapukkal történő reprezentálhatóságának kapcsolata a húrelméleti fekete lyuk megoldások kontextusában először a [5, 6, 7] dolgozatokban jelent meg. A későbbiek során kiderült, hogy ez a kapcsolat véges geometriai módszerekkel jól vizsgálható [13, 14, CvG10, LPS13]. Megjegyezzük, hogy matematikai szempontból a fent talált megfelelés jól érthető. A fekete lyuk U-dualitási csoportok ugyanis véges csoportok. A matematikai irodalomból jól ismert, hogy bizonyos véges csoportok speciális véges geometriai struktúrák automorfizmus csoportjaiként állnak elő. Ezen csoportok és egyes klasszikus hibajavító kódok kapcsolata is közismert [CS88]. Ezen sorok írása idején a fenti érdekes analógia esetleges fizikai alapjai tisztázatlanok.

9. FEJEZET

Kitekintés

9.1. Az egyszerű összefonott rendszerek szerepéről

Dolgozatunk befejezéseképp érdemes megvizsgálnunk, hogy ezen az igen érdekes területen milyen előrelépési lehetőségek adódnak.

A dolgozat első felében az összefonódottságot mint egy *erőforrást* tekintettük. Megmutattuk, hogy a geometriai szemlélet jelentősen megkönnyíti az összefonódottság klasszifikációjával kapcsolatos problémák megközelítését. Beláttuk, hogy az egyszerű összefonódott rendszerek az algebrai geometriából ismert egyszerű geometriai struktúrákkal kapcsolatosak. Ez a felismerés lehetővé tette polinom invariánsok és kovariánsok konstruálását. Ezek a mennyiségek az összefonódottság számszerűsítésére alkalmas mértékeket szolgáltatnak, melyek lehetővé tették bizonyos összefonódottsági típusok elkülönítését.

Tanulmányozott rendszereink néhány qubitból illetve néhány egyrészecske állapottal rendelkező fermionból álltak. Ezek az egyszerű több részrendszeres tiszta állapotban lévő összefonódott rendszerek az összefonódottság legelemibb geometriai mintázatairól tudósítanak. A dolgozat első fele ezeknek a mintázatoknak a részletes matematikai elemzését adta.

Feltártuk a Grassmann sokaságokon alapuló N -qubit összefonódottsági mértékek általános szerkezetét. Megmutattuk, hogy a fermionikus összefonódottság segítségével beágyazott qubit rendszereket is vizsgálhatunk. A fermionikus összefonódottság természetes általánosításaképp pedig bevezettük az általánosított SLOCC csoport fogalmát mely változó fermionszám esetén is alkalmazható. Végezetül a Freudenthal rendszerekkel kapcsolatos összefonódottságot tárgyaltuk.

A dolgozat címével összhangban a vizsgált rendszereink legtöbbjét tudatosan egyszerűnek választottuk. Például a Freudenthal rendszerekkel kapcsolatos valamennyi rendszerünk prehomogén vektorteret alkotott. Ez azt jelentette, hogy az általánosított SLOCC hatással szemben a komplex esetben egy nyílt pálya, és egy független relatív invariáns található. A Freudenthal típusú speciális rendszerek kitüntetett szerepe, a dolgozat második felében terítékre kerülő FLYQM-ben megjelenő speciális struktúrák összefonódottságon alapuló felhasználásában nyert értelmet.

Természetesen a dolgozatban bemutatott geometriai, invariánselméleti és reprezentációelméleti módszerek sikerrel alkalmazhatóak bonyolultabb, több részrendszeres tiszta, és kevert állapoti rendszerek vizsgálatára is. Ezeknek a módszereknek az alkalmazását láthatjuk például tiszta állapotokra Vrana Péter, illetve kevert állapotokra Szalay Szilárd PhD hallgatóim dolgozataiban [[Vra11b](#), [Vra11c](#), [Vra11a](#), [Sza13](#), [Sza11](#), [SK12](#), [Sza12](#)]. A fermionikus összefonódottsággal kapcsolatos eredményeknek a dolgozat szellemében történő továbbgondolását az Olvasó Sárosi Gábor PhD hallgatóm és a Szerző más társszerzőkkel publikált munkáiban találhatja meg [[Sár16](#), [SL14a](#), [11](#), [LNPG17](#), [HL16](#)].

Felmerül azonban a kérdés: vizsgálataink mennyiben járulnak hozzá az összefonódottságnak mint erőforrásnak a gyakorlatiasabb felhasználásához? Erre a kérdésre a választ a dolgozat írásának idején nem tudjuk. Fontos azonban azt látnunk, hogy a dolgozatban központi szerepet betöltő SLOCC klasszifikáció egy meglehetősen finom klasszifikáció. A qubitek, illetve a fermionok és a módusok számának növekedtével a SLOCC osztályok száma exponenciálisan növekszik. Ezért

az egyszerű rendszereknél jól használható, SLOCC osztályok feltárásán és polinom invariánsokkal történő jellemzésén alapuló, új komplex rendszerek esetén nem járható. Ebből következően az irodalomban számos olyan módszer létezik mely csupán az összefonódottság durvább, de jól körülírt fizikai kritériumoknak eleget tevő típusainak elkülönítésére korlátozódik [GT09b].

Ennek kapcsán hangsúlyozni szeretnénk, hogy a fermionikus összefonódott rendszerekkel kapcsolatos dolgozatbeli (lásd 3.5. fejezet) vizsgálataink egy gyakorlati szempontból is érdekes durvább klasszifikáció lehetőségére hívják fel a figyelmet.

Ez a durvább klasszifikáció a kvantum kémiából ismert csatolt klaszter módszernek (CCM) az összefonódottság elmélettel történő kombinálásán alapul [LNPG17]. Ez a módszer a fermionikus rendszerekre alkalmazott szokásos (3.29) alakú, a Slater determinánsokon alapuló, kifejtés helyett, egy az adott Slater determinánsból (betöltött pályák) klaszter operátorok alkalmazásával előállított kifejtést használ. A klaszter operátorok olyan egy, két, három stb. részecskés operátorok, melyek a betöltött pályákból egyet, kettőt, hármat stb. betöltetlen pályákra cserélnek. A módszer lényege: az összefonódottság durvább klasszifikációja a kétrészecskés klaszter operátorok szerkezetének vizsgálata útján. A magasabb rendű klaszter operátorok járulékaiknak elhanyagolása önkényesnek tűnik. Tekintettel azonban arra, hogy a fizikai alkalmazások során az összefonódásért felelős kölcsönhatási tagok gyakorta két részecse (módus) kicserélésén alapulnak, egy durvább klasszifikáció kiépítéséhez ez az út járhatónak tűnik. Valóban a dolgozatban tárgyalt három fermion hat és hét módusú esetének (lásd 3.3. és 3.4. fejezet) CCM-vel történő tárgyalása azt mutatja [LNPG17], hogy a kétrészecskés klaszter operátorok szerkezetében a SLOCC osztályok szerkezete egyszerűen felismerhető. A Szerző és F. Holweck által tanulmányozott [11] négy fermion nyolc módusú esetben [CDGZ13] pedig a módszer, jöllehet a SLOCC osztályok finom szerkezetét nem, a legfontosabb az úgynevezett félig egyszerű állapotoknak megfelelő pálya szerkezetét helyesen tárja fel. A módszer tetszőleges számú fermionra és módusra történő vizsgálata folyamatban van.

9.2. A FLYQM fizikai háttéréről

A dolgozat második felében az összefonódottságot mint egy *nyelvet* tekintettük, melynek segítségével a húrelméleti fekete lyuk megoldások matematikai szerkezetét egy új nézőpontból vizsgálhattuk. Ezt az új nézőpontot FLYQM-nek neveztük. A dolgozatban a FLYQM-sel kapcsolatban, a megfelelés fizikai alapjait nem firtató, pragmatikus álláspontot foglaltunk el.

Ez a spekulatív jellegű fejezet ettől az állásponttól eltávolodva, a Szerzőnek a FLYQM esetleges fizikai háttérével kapcsolatos vélekedését tartalmazza. Reményeink szerint az alábbiakban vázolt gondolatok kidolgozása, a FLYQM-nek a holografikus összefonódottsággal kapcsolatos, az 1.3 fejezetben részletezett, "It from Qubit" szellemi áramlatához való csatolását eredményezhetik.

9.2.1. Holografikus összefonódottság Legyen \mathcal{M} egy olyan $d + 1$ dimenziós, pszeudo-Riemann metrikával ellátott tartomány ("bulk") melynek határa a d dimenziós \mathcal{B} tartomány: $\partial\mathcal{M} = \mathcal{B}$. Az AdS/CFT megfelelés vizsgálata során kiderült [Mal03, CH04, CC04], hogy bizonyos \mathcal{B} -n értelmezett CFT-kre és azok Ψ állapotaira léteznek olyan *klasszikus* \mathcal{M}_Ψ geometriák melyek a határon lévő állapotok holografikus duáltjai. Legyen $(\mathcal{B}, \mathcal{M}_\Psi)$ egy ilyen holografikus módon összekapcsolt duális pár! A statikus esetben válasszuk ki a \mathcal{B} határnak egy $d - 1$ dimenziós $\Sigma_{\mathcal{B}}$ térszerű metszetét és annak egy $A \subset \Sigma_{\mathcal{B}}$ tartományát. $\Sigma_{\mathcal{B}}$ az \mathcal{M} , egy g Riemann metrikával ellátott, d dimenziós $(\Sigma_{\mathcal{M}}, g)$ térszerű tartományát határolja. Az \bar{A} komplementum módusainak kiintegrálásával meghatározhatjuk az A tartomány ρ_A redukált sűrűség operátorát majd ebből a tartomány (2.9) von Neumann összefonódottsági entrópiáját. Tekintsük a megfelelő CFT-re és Ψ állapotra az A tartomány S_A összefonódottsági entrópiáját. Ekkor a Ryu-Takayanagi [RT06]

formula szerint, holografikusan duált párokra, igaz, hogy

$$S_A = \frac{1}{4G_N} \text{Area}(\tilde{A}). \quad (9.1)$$

Itt \tilde{A} az \mathcal{M}_Ψ sokaság $(\Sigma_{\mathcal{M}}, g)$ térszerű szeletében található olyan $d - 1$ -dimenziós felület mely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. \tilde{A} határa megegyezik A határával.
2. \tilde{A} homológ A -val.
3. \tilde{A} minimális területű.

A RT-formula szerint [RT06] tehát, egy a *határon* lévő A tartomány összefonódottsági entrópiája megegyezik egy a *bulk*-ban élő A -val közös határral rendelkező homológ minimális felület Planck egységeiben mért területével. Figyeljük meg, hogy a (9.1) RT-formula az (5.148) Bekenstein-Hawking fekete lyuk entrópiaformula általánosításának tekinthető.

A RT-formula számos konceptuális problémát vet fel [HT07, KKM08, Hea14, FH16]. A problémák orvoslására, a gráfelméletből ismert "maximális folyam-minimális vágás" (MFMC) tétel Riemann geometriába adaptált változatának [Str83, Noz90, Fed75] felhasználásával, Freedman és Headrick a RT formula alábbi újrafogalmazását javasolta [FH16]

$$S_A = \max_p \int_A p, \quad dp = 0, \quad ||p|| \leq 1/4G_N. \quad (9.2)$$

Itt a maximalizálást a $(\Sigma_{\mathcal{M}}, g)$ -n értelmezett p , zárt és korlátos $d - 1$ formákra kell elvégezni. Mivel $*p = v$ egy vektormezőt ad, ezért a baloldal, a divergenciamentes, korlátos vektormezők ("folyamok") fluxusának maximalizálát jelenti. A folyamok integrálgörbéit (erővonalakat) **bit-szálaknak** nevezik [FH16]. Az MFMC-tételnek köszönhetően tehát, a felületek minimalizálásán alapuló (9.1) szemléletet, a fluxusok maximalizálásán alapuló (9.2) szemlélet váltja ki.

Az MFMC-tétel miatt a bit-szálak maximális sűrűségüket a (9.1) formula *minimális felületén* veszik fel. Könnyen látható, hogy *bármely* olyan bit-szál mely a maximális lehetséges fluxust realizálja, ezen a felületen a $v^\mu = n^\mu/4G_N$ alakban áll elő, ahol n a minimális felület normálvektora. A minimális felületen kívül azonban az ilyen v , a zárttság és korlátosság szabta korlátokon belül, tetszőlegesen választható. Ez a mértékszabadsági fokokra emlékeztető tulajdonság teszi lehetővé azt, hogy a RT formulával kapcsolatos problémákat megoldjuk [FH16].

Amennyiben $(\Sigma_{\mathcal{M}}, g)$ egy $d - 1$ dimenziós m hiperfelületéhez létezik olyan zárt p forma, mellyel kapcsolatos vektormező m -re történő leszűkítésére teljesül az, hogy $v^\mu = n^\mu/4G_N$, akkor¹ azt mondjuk, hogy p *kalibrálja* m -et [HL82]. Könnyen belátható [HL82, FH16], hogy amennyiben kalibrált, akkor m a homológia osztályában egy *minimális felületet* ad. A kalibrációs nyelvezetben az MFMC-tétel a fenti állítás nemtriviális megfordításával kapcsolatos: bármely m hiperfelület mely a homológia osztályában *minimális*, kalibrált hiperfelület. Az RT-formulában szereplő $m(A)$ minimális hiperfelületekhez tehát található kalibráció, a kalibrációval kapcsolatos vektormező integrálgörbéi pedig a bit-szálak.

A statikus esetben tehát a (9.2) formula értelmében a \mathcal{B} *határon* élő CFT Ψ állapotának összefonódottsági tulajdonságait az \mathcal{M}_Ψ *bulkban* a p kalibráció bit-szála kódolják. Speciálisan, a Ψ állapot S_A összefonódottsági entrópiájának, a p kalibráció A -n átmenő maximális fluxusa felel meg. Figyeljük meg azt is, hogy mivel $\Sigma_{\mathcal{M}}$ egy Riemann sokaság, ezért a Ψ állapot ezen a sokaságon implicit módon egy, a p kalibrációval szoros kapcsolatban lévő, g Riemann metrikát határoz meg. A p és g közötti kapcsolat a

$$||p||^2 = \frac{1}{(d-1)!} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_{d-1} \nu_{d-1}} p_{\mu_1 \dots \mu_{d-1}} p_{\nu_1 \dots \nu_{d-1}} \leq \left(\frac{1}{4G_N} \right)^2 \quad (9.3)$$

¹A matematikában megszokott definícióban $v^\mu = Cn^\mu$ ahol $C = 1$.

korlátossági feltételből látható.

9.2.2. FLYQM és bit-szálak? A FLYQM-sel kapcsolatos eredmények mindegyike a 4.1 táblázattal kapcsolatos, (7.65) alakú formák, (7.69) poliformák stb. rendhagyó, összefonódottság elméleti interpretációján alapult. Ezek a mennyiségek a húrelméleti kontextusban az extra dimenziók kohomológiájával álltak kapcsolatban. Ebből fakadóan a kérdésünk az alábbi: Mi lehet ezeknek a mennyiségeknek a fizikai szempontból is értékelhető kvantum információelméleti interpretációja?

A fenti kérdésre a legkézenfekvőbb válasz az, hogy a fenti mennyiségek a holografikus összefonódottság kapcsán megismert bit-szálak extra dimenziós megfelelői. Dolgozatunkat ezen sejtéssel kapcsolatos észrevételeinkkel zárjuk.

A RT-formula (9.2) Freedman-Headrick átfogalmazásában kulcs szerepet játszó mennyiségek, egy d dimenziós $(\Sigma_{\mathcal{M}}, g)$ Riemann sokaság, $d-1$ dimenziós \tilde{A} hiperfelületeivel kapcsolatos, p kalibrációi. Általában a kalibrációk egy G Riemann metrikával ellátott n dimenziós (Y, G) sokaságon megadott olyan zárt, és korlátos \mathcal{P} k -formák, melyeknek egy k dimenziós \tilde{L} részsokaságra történő megszorítása, éppen az \tilde{L} térfogati formáját adja. Ekkor az \tilde{L} részsokaságot, a \mathcal{P} által kalibrált részsokaságnak nevezzük. Mint tudjuk a kalibrált részsokaságok alaptulajdonsága az, hogy ezek a homológia osztályukban *minimális* tulajdonsággal rendelkeznek [HL82].

Kalibrált sokaságokkal az (5.118)-(5.123) egyenletek kapcsán már találkoztunk, ott szuper-szimmetrikus ciklusoknak hívtuk őket [BBS95]. Ismeretes, hogy ezek az L részsokaságok a $\Re(e^{-i\alpha}\Omega)$ holomorf háromformára nézve [HL82, Den01] az X Calabi-Yau sokaság, (5.118) feltételnek is eleget tevő, kalibrált részsokaságai. Ezeket a valós három dimenziós részsokaságokat *speciális Lagrange-féle* részsokaságoknak nevezik. Könnyen megmutatható, hogy (7.45) és (7.63) értelmében, a fekete lyuk entrópia a dolgozatban már használt mennyiségekkel az alábbi alakban írható fel

$$S_{BH} = \frac{\pi}{2} \int_L \hat{P}. \quad (9.4)$$

Ez a formula azt mutatja, hogy a fekete lyuk entrópiát mint egy speciális zárt \hat{P} háromforma, L -en átmenő fluxusát írhatjuk fel². Tudjuk azt is, hogy S_B a (7.37) képlet értelmében a (7.42) holomorf térfogat alakjában is felírható, ez az eredmény pedig mint ismeretes [OVV05, GSV06, Fio06] megfelelő mellékfeltétellel³ történő maximalizálással is megkapható. A fekete lyuk entrópia tehát vélhetően, zárt formák bizonyos részsokaságain átmenő fluxusok, megfelelő mellékfeltétellel történő maximalizálásával, is megkapható.

Tekintsük most az (X, ω, Ω) CY sokaságokat, és tekintsük X -en az úgynevezett topológikus B és \bar{B} -modelleket [BCOV94, OSV04, Pes06, PW05, SV08]. Ezekben a modellekben a CY sokaság ω Kähler formája rögzített, az Ω -val kapcsolatos komplex struktúra viszont változhat. Ezek a modellek, mint a (7.68) egyenlet kapcsán már tudjuk, a topológikus húrelméletek jól ismert modelljeit adják, melyekre számos egzakt eredmény ismert [BCOV94]. Ismeretes például az, hogy a B-model topológikus húrjait, mint egy $H^3(X)$ feletti kvantum mechanikai rendszert is felfoghatjuk. Ennek a modellnek az operátorait egy-egyértelmű kapcsolatba hozhatjuk az X kohomológiájának $H^{(2,1)}(X)$ részével, továbbá a modell partíciós függvénye egy $H^3(X)$ feletti hullámfüggvénynek is tekinthető [Wit93, Ver04]. Ez a hullámfüggvény viselkedés könnyen értelmezhető akkor, ha az X sokaságot egy hétdimenziós Y sokaság határáként képzeljük el [RSAC05]. Ha ugyanis $X = \partial Y$, akkor egy Y -on értelmezett elméletre vonatkozó pályaintegrál épp az X -en előírt határfeltételekkel kapcsolatos hullámfüggvényt állítja elő.

²Az L a, \hat{P} Freudenthal duálltal azonos kohomológia osztályban lévő, P Poincaré duállta.

³Ez a mellékfeltétel azonban nem a kalibrációs forma várt korlátosságával kapcsolatos. Ez azonban bennünket most nem zavar, hiszen mi most a fluxus maximalizálását nem X -en hanem egy eggyel magasabb dimenziós Y térben szeretnénk majd elvégezni.

Mint tudjuk, ezt a hétdimenziós Y -on értelmezett elméletet, topológikus M-elméletnek nevezzük [RSAC05]. A topológikus M-elmélet azonban klasszikus szinten a G_2 holonómiájú metrikák geometriai elmélete [HM99]. Ennek az elméletnek a kvantum korrekciói pedig épp az Y tér háromdimenziós kalibrált részsokaságaira csavarodó membránjaiból erednek.

A topológikus $B\bar{B}$ -modellek keretén belül a (9.4) entrópiának mikroszkópikus értelmezés adható [OSV04]. Másrészt a fenti megfontolások azt mutatják, hogy (9.4) jobb oldalának, az Y G_2 holonómiájú, Riemann sokaság klasszikus geometriájának nyelvén, holografikus értelmezést is adhatunk. A kapcsolódási pontok feltárására, Hitchin nyomán [Hit01], az alábbi lokális konstrukciót használhatjuk.

Legyenek $\mathcal{A} \in H^3(X, \mathbb{R})$ és $\mathcal{B} \in H^4(X, \mathbb{R})$ kohomológia osztályok, és $(P, Q) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, ahol $Q = \omega \wedge \omega/2$. Megmutatható [Hit01], hogy a $\mathcal{C} \equiv \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ téren megadható egy szimplektikus forma. \mathcal{C} -re tehát tekinthetünk úgy is mint egy végtelen dimenziós fázistérre. Képezzük ezen a fázistéren a (7.44) $V_H[P] = \int_X (-\mathcal{D}(P))^{1/2} d^6x$ és a $V_H[Q] = \int_X (-\mathcal{F}(Q))^{1/2} d^6x$ Hitchin funkcionálokból a

$$H[P, Q] = V_H[P] - 2V_H[Q] \quad (9.5)$$

Hamilton függvényt.⁴ Ez a Hamilton függvény a \mathcal{C} -n, a Hamilton-féle kanonikus egyenleteken keresztül egy $(P(t), Q(t))$ folyamatot definiál. Ekkor az állítás az alábbi [Hit01]: Ha a $t = t_0$ paraméterértéknél a $(P(t), \omega(t))$ pár kielégíti a (3.56) és a (3.168) feltételeket akkor a t_0 kezdőpontú és t_1 végpontú Hamilton-féle evolúció eredményeképp a

$$\mathcal{P}(t) \equiv P(t) + \omega(t) \wedge dt \quad (9.6)$$

háromforma az $Y = X \times [t_0, t_1]$ hétdimenziós sokaságon egy (3.155) alakú G_2 holonómiájú Riemann metrikát indukál.

A fenti állítás jelentése világos. A hatdimenziós X CY sokaságon t_0 -ban megadott adatok ($\Omega = P + i\hat{P}$ holomorf háromformából eredeztethető komplex, és az ezzel kompatibilis ω -val jellemzett Kähler struktúra) a \mathcal{C} modulustéren mint fázistéren egy t_1 -ben végződő folyamat indukálnak. Ez a folyam egy lokálisan $X \times [t_0, t_1]$ alakú Y hétdimenziós sokaság G_2 holonómiájú Riemann geometriájának ad életet. Az egész konstrukció lelkét a (9.5) Hamilton függvénnyel kapcsolatos funkcionál képezi. Mint tudjuk az ebben szereplő két funkcionál, összefonódottsággal kapcsolatos entrópia funkcionál. Valóban, mint azt például az X -en értelmezett kombinált topológikus $B\bar{B}$ elmélet (7.68) partíciós függvényével kapcsolatos tárgyalás során láttuk, a $V_H(P)$ funkcionál a *kvantált* topológikus hurok entrópiájának vezető rendjét ragadja meg. Tehát a t_0 -val jellemzett határon (X) megadott (kvantum) adatok, a bulk-ban (Y) lévő klasszikus geometriában öltenek testet. Ez a "klasszikus geometria-kvantum összefonódottságból" paradigma pedig ismét a Ryu-Takayanagi formula szellemiségét idézi.

A fentiek szellemében kézenfekvőnek tűnik az alábbi naív általánosítás. Legyen (Y, G) egy kompakt, irányítható, hét dimenziós valós Riemann sokaság G metrikával, \mathcal{P} egy zárt, korlátos háromforma Y -on. Legyen továbbá $X = \partial Y$ az Y hatdimenziós határa, illetve $L \subset X$ egy három dimenziós részsokaság. Defináljunk az \mathcal{S}_L mennyiséget az alábbi módon

$$\mathcal{S}_L = \max_{\mathcal{P}} \int_L \mathcal{P}, \quad d\mathcal{P} = 0, \quad \|\mathcal{P}\| \leq 1. \quad (9.7)$$

Sejtésünk szerint az \mathcal{S}_L mennyiségen keresztül, az Y sokaság Riemann geometriájának L -vel homológ minimális tulajdonságú háromdimenziós valós sokaságai, kapcsolatban állnak az X sokaságon élő "bizonyos kvantumtérelméletek" állapotainak L -beli módusainak összefonódottságával.

Összehasonlítva ezt a bit-szálakkal kapcsolatos (9.2) összefüggéssel, a fenti sejtéssel kapcsolatban az alábbi súlyos problémák merülnek fel. Talán a legfontosabb kritikai észrevétel az, hogy

⁴A $\text{Pf}(\omega)$ invariáns helyett célszerűbb az $\mathcal{F}(Q) \equiv \text{Pf}(\tilde{\omega})$ invariánst használni, ahol $\tilde{\omega}$ kifejezését lásd a (3.124) képletben.

a RT-formulával kapcsolatos MFMC tétel általában nem érvényes. Ez azt jelenti, hogy a minimális részsokaságok létéből még nem következik az, hogy azok kalibráltak is. Ezért ugyan a RT-formulánál a fluxus maximalizálásán alapuló kép ekvivalens volt a részsokaságok minimalizálásán alapulóval, de ez az Y sokaság kapcsán általában már nem teljesül. Tehát Y -ra további feltételeket kell kikötnünk⁵. Nem világos az sem, hogy a RT-formula kontextusából jólismert CFT-knek megfelelő, "bizonyos kvantumtérelméletek" kifejezés mit is takar. A topológikus húr-elméletek fent említett példája azt sugallja, hogy ezek a térelméletek topológikusak, azaz az elmélet fizikai mennyiségei az X -tér bizonyos topológikus invariánsai. Ez esetben az \mathcal{S}_L mennyiség ezekkel az invariánsokkal kell, hogy kapcsolatban álljon. Egy másik fontos kérdés az, hogy G_2 struktúrával rendelkező Y sokaságok, és X -en élő topológikus térelméletek választása esetén, pontosan milyen kvantumtérelméletekre várjuk azt, hogy a 11 dimenziós M-elmélet Y -ra történő kompaktifikációja útján a 4 dimenziós RT-formula bit szálaival kapcsolatot teremthetünk? Továbbá, mégha a fent definiált \mathcal{S}_L mennyiség matematikai szempontból értelmes is, az nem feltétlenül rendelkezik egy X -beli elméletre vonatkozó összefonódottság elméleti jelentéssel⁶.

A vázolt ellenvetések dacára könnyen látható, hogy az $Y = X \times [t_0, t_1]$ -vel és a (9.6) folyamattal kapcsolatos lokális konstrukció a (9.7) nyelvén is megfogalmazható. Ebben az esetben rögzített G G_2 -holonómiájú metrika esetén a \mathcal{P} formát változtatva a fluxust maximalizáljuk. Ekkor az X -en élő $B\bar{B}$ modell speciális esetében a fluxus maximalizálása a (9.4)-ből ismert $S_L = \frac{\pi}{2} \mathcal{S}_L$ fekete lyuk entrópiát adja. Létezik azonban a (9.2) bit szálas interpretációnak egy duális olvasata is [FH16]. Ez a (9.7) kontextusában az alábbiakat jelenti. Legyen ezúttal a \mathcal{P} forma a rögzített, és változtassuk a G metrikát oly módon, hogy a $\|\mathcal{P}\| \leq 1$ feltétel egyenlőséggel teljesüljön

$$\frac{1}{3!} G^{I_1 J_1} G^{I_2 J_2} G^{I_3 J_3} \mathcal{P}_{I_1 I_2 I_3} \mathcal{P}_{J_1 J_2 J_3} = 1. \quad (9.8)$$

Amennyiben a metrikára a $P \wedge \omega = 0$ feltétellel kompatibilis alakú ansatz-ot veszünk fel, és a G^{IJ} inverznek csak azon részét variáljuk mely a komplex struktúra modulusokkal kapcsolatos, akkor a $X = T^6$ esetén a modulusokra pontosan a jólismert BPS attraktor egyenleteket kapjuk. Ekkor a $\|\mathcal{P}\| = 1$ feltételt kielégítő metrika a (3.155)-ből már ismert G_2 struktúrával kapcsolatos alakot fogja ölteni.

Érdemes figyelni arra is, hogy az attraktor mechanizmus, és a bit szálas képben felbukkanó folyamatok további fontos hasonlatossággal is rendelkeznek. Nevezetesen, a szuperszimmetrikus attraktor mechanizmusnál a modulusok aszimptotikus értékeit tetszőlegesen választhatjuk, de a horizonton (a minimális felületnél) a modulusok stabilizálódnak. Ez az egyértelműen meghatározott horizonttal kapcsolatos speciális zárt \hat{P} háromforma megjelenésére vezet. Ez a speciális háromforma egy entrópiafunkcionált maximalizál [OVV05, GSV06, Fio06]. A bit szálas esetén is, lásd (9.2), az A -n átmenő fluxust maximalizáló zárt p formát az $m(A)$ minimális felülettől eltekintve tetszőlegesen választhatjuk. Az $m(A)$ -n azonban a p már egyértelműen meghatározott.

Továbbá mindkét esetben a maximalizálás rögzített kohomológia osztályban történik. Ugyanakkor a (9.7) és (9.2) formulákban megjelenő \mathcal{P} és p formákkal kapcsolatos kohomológiák modulusok szerepét töltik be⁷. Vélhetően, a Headrick-Freedman esetben a p formák kohomológiája az AdS metrikák modulussterével kapcsolatos. Ebből következően a (9.6) folyamattal kapcsolatos észrevételeink arra utalnak, hogy a megfelelő folyamatok, így a Headrick-Freedman-féle bit szálasakat is, igazából a megfelelő modulus tereken érdemes tanulmányozni.

⁵Például ha, akárcsak az $Y = X \times [t_0, t_1]$ esetben, elvárjuk, hogy Y -on az M-elmélettel kapcsolatos G_2 struktúrák létezzenek, akkor ehhez az kell, hogy Y második Stiefel-Whitney osztálya eltűnjön.

⁶A "valamilyen" topológikus invariánst számoló \mathcal{S}_L nem feltétlenül hozható kapcsolatba módusok S_L von-Neumann entrópiájával.

⁷Az X komplex struktúra modulustere lokálisan $H^3(X, \mathbb{R})$ egy nyílt halmaza, az Y G_2 holonómiájú metrikáinak modulustere pedig lokálisan $H^3(Y, \mathbb{R})$ egy nyílt halmaza [Hit00].

Irodalomjegyzék

- [AAC⁺00] A. Acín, A. Andrianov, L. Costa, E. Jané, J. I. Latorre, and R. Tarrach. Generalized Schmidt decomposition and classification of three-quantum-bit states. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1560–1563, Aug 2000.
- [AAJT01] A Acín, A Andrianov, E Jané, and R Tarrach. Three-qubit pure-state canonical forms. *J. Phys. A*, 34(35):6725, 2001.
- [AB59] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485–491, Aug 1959.
- [ADOT07] Laura Andrianopoli, Riccardo D’Auria, Emanuele Orazi, and Mario Trigiante. First order description of black holes in moduli space. *Journal of High Energy Physics*, 2007(11):032, 2007.
- [Agr08] Ilka Agricola. Old and new on the exceptional group G2. *Notices of the American Mathematical Society*, 55:922–929, 2008.
- [AK08] Murat Altunbulak and Alexander Klyachko. The Pauli Principle revisited. *Communications in Mathematical Physics*, 282(2):287–322, 2008.
- [AM08] Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 2008.
- [AS96] C. Vafa A. Strominger. Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy. *Physics Letters B*, 379:99, 1996.
- [Bae02] John C Baez. The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39:145–205, 2002.
- [BBC⁺93] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70(13):1895–1899, Mar 1993.
- [BBS95] Katrin Becker, Melanie Becker, and Andrew Strominger. Fivebranes, membranes and non-perturbative string theory. *Nuclear Physics B*, 456(1–2):130 – 152, 1995.
- [BCF91] M Bodner, A C Cadavid, and S Ferrara. (2,2) vacuum configurations for type iia superstrings: N=2 supergravity Lagrangians and algebraic geometry. *Classical and Quantum Gravity*, 8(5):789, 1991.
- [BCH73] J.M. Bardeen, B. Carter, and S.W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 31(2):161–170, 1973.
- [BCOV94] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, and C. Vafa. Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes. *Communications in Mathematical Physics*, 165(2):311–427, 1994.
- [BCP⁺09] E. Bergshoeff, W. Chemissany, A. Ploegh, M. Trigiante, and T. Van Riet. Generating geodesic flows and supergravity solutions. *Nuclear Physics B*, 812(3):343 – 401, 2009.
- [BD72] R E Borland and K Dennis. The conditions on the one-matrix for three-body fermion wavefunctions with one-rank equal to six. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 5(1):7, 1972.

- [BD11] Brandon Bates and Frederik Denef. Exact solutions for supersymmetric stationary black hole composites. *Journal of High Energy Physics*, 2011(11):1–14, 2011.
- [BDD⁺08] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, H. Ebrahim, and W. Rubens. Wrapped branes as qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 100:251602, Jun 2008.
- [BDD⁺09a] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, W. Rubens, and H. Ebrahim. Freudenthal triple classification of three-qubit entanglement. *Phys. Rev. A*, 80:032326, Sep 2009.
- [BDD⁺09b] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, W. Rubens, and H. Ebrahim. Freudenthal triple classification of three-qubit entanglement. *Phys. Rev. A*, 80:032326, Sep 2009.
- [BDD⁺09c] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, H. Ebrahim, and W. Rubens. Black holes, qubits and octonions. *Physics Reports*, 471(3–4):113 – 219, 2009.
- [BDD⁺10] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, A. Marrani, and W. Rubens. Four-qubit entanglement classification from string theory. *Phys. Rev. Lett.*, 105:100507, Sep 2010.
- [BDDR09] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, and W. Rubens. Black holes admitting a Freudenthal dual. *Phys. Rev. D*, 80:026003, Jul 2009.
- [BDL12] Leron Borsten, Michael J. Duff, and Péter Lévy. The Black-Hole/Qubit Correspondence: an up-to-date review. *Classical and Quantum Gravity*, 29, 2012.
- [BDMR11] L. Borsten, M. J. Duff, A. Marrani, and W. Rubens. On the black-hole/qubit correspondence. *The European Physical Journal Plus*, 126(4), 2011.
- [BDSW96] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54:3824–3851, Nov 1996.
- [Bek73a] J. D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7:2333, 1973.
- [Bek73b] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, Apr 1973.
- [Bek74] Jacob D. Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Phys. Rev. D*, 9:3292–3300, Jun 1974.
- [Ber59] B. Bertotti. Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity. *Phys. Rev.*, 116:1331–1333, Dec 1959.
- [Ber84] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 392(1802):45–57, 1984.
- [Ber87] M. V. Berry. The adiabatic phase and Pancharatnam’s phase for polarized light. *Journal of Modern Optics*, 34(11):1401–1407, 1987.
- [BF89] M. G. Benedict and L. Gy. Fehér. Quantum jumps, geodesics, and the topological phase. *Phys. Rev. D*, 39:3194–3196, May 1989.
- [BFGM06] Stefano Bellucci, Sergio Ferrara, Murat Günaydin, and Alessio Marrani. Charge orbits of symmetric special geometries and attractors. *International Journal of Modern Physics A*, 21(25):5043–5097, 2006.
- [BFMY08] Stefano Bellucci, Sergio Ferrara, Alessio Marrani, and Armen Yeranyan. stu black holes unveiled. *Entropy*, 10(4):507–555, 2008.
- [BG78] Vinberg E. B. and Elashvili A. G. Classification of trivectors of a 9-dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.*, 18:197–233, 1978.
- [BGH07] Dorje C Brody, Anna C T Gustavsson, and Lane P Hughston. Entanglement of three-qubit geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 67(1):012044, 2007.
- [BH99] Xavier Bekaert and Marc Henneaux. Comments on chiral p-forms. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1161–1172, 1999.

- [BH01] Dorje C. Brody and Lane P. Hughston. Geometric quantum mechanics. *Journal of Geometry and Physics*, 38(1):19 – 53, 2001.
- [BKR⁺96] Klaus Behrndt, Renata Kallosh, Joachim Rahmfeld, Marina Shmakova, and Wing Kai Wong. STU black holes and string triality. *Phys. Rev. D*, 54:6293–6301, Nov 1996.
- [BLS98] Klaus Behrndt, Dieter Lüst, and Wafic A. Sabra. Stationary solutions of N=2 supergravity. *Nuclear Physics B*, 510(1–2):264 – 288, 1998.
- [BMG88] Peter Breitenlohner, Dieter Maison, and Gary Gibbons. 4-dimensional black holes from Kaluza-Klein theories. *Communications in Mathematical Physics*, 120(2):295–333, 1988.
- [BMOS07] S. Bellucci, A. Marrani, E. Orazi, and A. Shcherbakov. Attractors with vanishing central charge. *Physics Letters B*, 655(3–4):185 – 195, 2007.
- [BMP10] Guillaume Bossard, Yann Michel, and Boris Pioline. Extremal black holes, nil-potent orbits and the true fake superpotential. *Journal of High Energy Physics*, 2010(1), 2010.
- [BNS09] Guillaume Bossard, Hermann Nicolai, and K.S. Stelle. Universal BPS structure of stationary supergravity solutions. *Journal of High Energy Physics*, 2009(07):003, 2009.
- [Bor13] L Borsten. Freudenthal ranks: Ghz versus w. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(45):455303, 2013.
- [BPR⁺00] Charles H. Bennett, Sandu Popescu, Daniel Rohrlich, John A. Smolin, and Ashish V. Thapliyal. Exact and asymptotic measures of multipartite pure-state entanglement. *Phys. Rev. A*, 63:012307, Dec 2000.
- [BPST75] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz, and Yu.S. Tyupkin. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Physics Letters B*, 59(1):85 – 87, 1975.
- [BRGBS13] Carlos L. Benavides-Riveros, José M. Gracia-Bondia, and Michael Springborg. Quasipinning and entanglement in the lithium isoelectronic series. *Phys. Rev. A*, 88:022508, Aug 2013.
- [BRS⁺08] Rudolf Baier, Paul Romatschke, Dam Thanh Son, Andrei O. Starinets, and Mikhail A. Stephanov. Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography. *Journal of High Energy Physics*, 2008(04):100, 2008.
- [Bry87] R. Bryant. Metrics with exceptional holonomy. *Ann. Math.*, 126:525–576, 1987.
- [BT89] Paolo Budinich and Andrzej Trautman. Fock space description of simple spinors. *Journal of Mathematical Physics*, 30(9):2125–2131, 1989.
- [BW35] R. Brauer and H. Weyl. Spinors in n dimensions. *American Journal of Mathematics*, 57:425, 1935.
- [BŻ02] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski. Cpn, or, entanglement illustrated. *International Journal of Modern Physics A*, 17(31):4675–4695, 2002.
- [BŻ06] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2006.
- [Car38] Élie Cartan. *Leçons sur Théorie des Spineurs*. Hermann, Paris, 1938.
- [Cay45] A. Cayley. On the theory of linear transformations. *Camb. Math. J.*, 4:193–209, 1845.
- [CBG99] P. Bain C. Bachas and M. Green. Curvature terms in D-brane actions. *Journal of High Energy Physics*, 011:9905040, 1999.
- [CC04] Pasquale Calabrese and John Cardy. Entanglement entropy and quantum field theory. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2004(06):P06002, 2004.

- [CC14a] David D. K. Chow and Geoffrey Compère. Black holes in $N=8$ supergravity from $SO(4,4)$ hidden symmetries. *Phys. Rev. D*, 90:025029, Jul 2014.
- [CC14b] David D. K. Chow and Geoffrey Compère. Seed for general rotating non-extremal black holes of $N=8$ supergravity. *Class. Quant. Grav.*, 31:022001, 2014.
- [CCD⁺07] Gabriel L. Cardoso, Anna Ceresole, Gianguido Dall’Agata, Johannes M. Oberreuter, and Jan Perz. First-order flow equations for extremal black holes in very special geometry. *Journal of High Energy Physics*, 2007(10):063, 2007.
- [CcvT96] Mirjam Cvetič and Arkady A. Tseytlin. Solitonic strings and bps saturated dyonic black holes. *Phys. Rev. D*, 53:5619–5633, May 1996.
- [CD07a] Anna Ceresole and Gianguido Dall’Agata. Flow equations for non-BPS extremal black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2007(03):110, 2007.
- [CD07b] O. Chterental and D. Djokovic. In „*Linear algebra research advances*”, Edited by G.D. Ling. Nova Science Publishers, New York, 2007.
- [CDF96] A. Ceresole, R. D’Auria, and S. Ferrara. The symplectic structure of $N=2$ supergravity and its central extension. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 46(1–3):67 – 74, 1996.
- [CDGZ13] Lin Chen, Dragomir Ž. Đoković, Markus Grassl, and Bei Zeng. Four-qubit pure states as fermionic states. *Phys. Rev. A*, 88:052309, Nov 2013.
- [CDGZ14] Lin Chen, Dragomir Ž. Đoković, Markus Grassl, and Bei Zeng. Canonical form of three-fermion pure-states with six single particle states. *Journal of Mathematical Physics*, 55(8), 2014.
- [CdIO91] Philip Candelas and Xenia C. de la Ossa. Moduli space of Calabi-Yau manifolds. *Nuclear Physics B*, 355(2):455 – 481, 1991.
- [CFR01] Carlton M. Caves, Christopher A. Fuchs, and Pranaw Rungta. Entanglement of formation of an arbitrary state of two rebits. *Foundations of Physics Letters*, 14:199–212, 2001. 10.1023/A:1012215309321.
- [CGRT12] W. Chemissany, P. Giaccone, D. Ruggeri, and M. Trigiante. Black hole solutions to the α' -model and their orbits (i). *Nuclear Physics B*, 863(1):260 – 328, 2012.
- [CH04] H. Casini and M. Huerta. A finite entanglement entropy and the c-theorem. *Physics Letters B*, 600(1–2):142 – 150, 2004.
- [Che54] Claude Chevalley. *The algebraic theory of spinors*. Columbia University Press, New York, NY, USA, 1954.
- [CJ78] E. Cremmer and B. Julia. The $N=8$ supergravity theory. i. the Lagrangian. *Physics Letters B*, 80(1–2):48 – 51, 1978.
- [CJ79] E. Cremmer and B. Julia. The $SO(8)$ supergravity. *Nuclear Physics B*, 159(1):141 – 212, 1979.
- [CKW00] Valerie Coffman, Joydip Kundu, and William K. Wootters. Distributed entanglement. *Phys. Rev. A*, 61(5):052306, Apr 2000.
- [CL15] G. Compère and V. Lekeu. E7(7) invariant non-extremal entropy. *arXiv:1510.03582*, 2015.
- [Cle03] Jean-Louis Clerc. Special prehomogeneous vector spaces associated to F_4 , E_6 , E_7 , and E_8 . *Journal of Algebra*, 264(1):98 – 128, 2003.
- [COGP91] Philip Candelas, Xenia C. De La Ossa, Paul S. Green, and Linda Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. *Nuclear Physics B*, 359(1):21 – 74, 1991.
- [Coo95] B.N. Cooperstein. The fifty-six-dimensional module for E_7 : I. a four form for E_7 . *Journal of Algebra*, 173(2):361 – 389, 1995.
- [CRR11] Wissam Chemissany, Jan Rosseel, and Thomas Van Riet. Black holes as generalised Toda molecules. *Nuclear Physics B*, 843(2):413 – 428, 2011.

- [CRTR10] W. Chemissany, J. Rosseel, M. Trigiante, and T. Van Riet. The full integration of black hole solutions to symmetric supergravity theories. *Nuclear Physics B*, 830(3):391 – 413, 2010.
- [CS88] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups*, volume 290 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1988.
- [CvG10] Bianca Letizia Cerchiai and Bert van Geemen. From qubits to E7. *Journal of Mathematical Physics*, 51(12):122203, 2010.
- [dBdMESS08] J de Boer, P de Medeiros, S El-Showk, and A Sinkovics. G2 Hitchin functionals at one loop. *Classical and Quantum Gravity*, 25(7):075006, 2008.
- [Den00] Frederik Denef. Supergravity flows and D-brane stability. *Journal of High Energy Physics*, 2000(08):050, 2000.
- [Den01] Frederik Denef. Disassembling special lagrangians. *arXiv:hep-th/0107152v2*, 2001.
- [Deu85] D. Deutsch. Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 400(1818):97–117, 1985.
- [DF07a] M. J. Duff and S. Ferrara. E_6 and the bipartite entanglement of three qutrits. *Phys. Rev. D*, 76:124023, Dec 2007.
- [DF07b] M. J. Duff and S. Ferrara. E_7 and the tripartite entanglement of seven qubits. *Phys. Rev. D*, 76:025018, Jul 2007.
- [DH00] David Deutsch and Patrick Hayden. Information flow in entangled quantum systems. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 456(1999):1759–1774, 2000.
- [DiV95] David P. DiVincenzo. Quantum computation. *Science*, 270(5234):255–261, 1995.
- [Duf96] M.J. Duff. M theory (the theory formerly known as strings). *International Journal of Modern Physics A*, 11(32):5623–5641, 1996.
- [Duf07] M. J. Duff. String triality, black hole entropy, and Cayley’s hyperdeterminant. *Phys. Rev. D*, 76:025017, Jul 2007.
- [DVC00] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Phys. Rev. A*, 62:062314, Nov 2000.
- [Ehl57] J. Ehlers. *PhD Thesis*. Hamburg University, 1957.
- [Ehr99] Richard Ehrenborg. Canonical forms of two by two by two matrices. *Journal of Algebra*, 213(1):195 – 224, 1999.
- [Eld04] Alberto Elduque. The magic square and symmetric compositions. *Revista Mat. Iberoamericana*, 20:475–491, 2004.
- [Ema04] Clive Emary. A bipartite class of entanglement monotones for n-qubit pure states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(34):8293, 2004.
- [Eng00] F. Engel. Ein neues, dem linearen komplexe analoges gebilde. *Leipz. Ber.*, 52:63–76, 220–239, 1900.
- [Fed75] Herbert Federer. Real flat chains, cochains and variational problems. *Indiana Univ. Math. J.*, 24:351–407, 1975.
- [Fey82] Richard P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6):467–488, 1982.
- [FG96] J. Faraut and S. Gindikin. Pseudo-hermitian symmetric spaces of tube type. *Progress in Nonlinear Diff. Equat.*, 20:123–154, 1996.
- [FGK97] Sergio Ferrara, Gary W. Gibbons, and Renata Kallosh. Black holes and critical points in moduli space. *Nuclear Physics B*, 500(1–3):75 – 93, 1997.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory-A First Course*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1991.

- [FH16] Michael Freedman and Matthew Headrick. Bit threads and holographic entanglement. *arXiv:1604.00354*, 2016.
- [Fio06] Bartomeu Fiol. On the critical points of the entropic principle. *Journal of High Energy Physics*, 2006(03):054, 2006.
- [FK96a] Sergio Ferrara and Renata Kallosh. Supersymmetry and attractors. *Phys. Rev. D*, 54:1514–1524, Jul 1996.
- [FK96b] Sergio Ferrara and Renata Kallosh. Universality of supersymmetric attractors. *Phys. Rev. D*, 54:1525–1534, Jul 1996.
- [FK16] Sergio Ferrara and Renata Kallosh. Seven disk manifold, alpha attractors and b-modes. *arXiv:1610.04163*, 2016.
- [FKS95] Sergio Ferrara, Renata Kallosh, and Andrew Strominger. N=2 extremal black holes. *Phys. Rev. D*, 52:R5412–R5416, Nov 1995.
- [FM07] Sergio Ferrara and Alessio Marrani. On the moduli space of non-BPS attractors for symmetric manifolds. *Physics Letters B*, 652(2–3):111 – 117, 2007.
- [Fre54] Hans Freudenthal. Beziehungen der E7 und E8 zur oktavenebene ii. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.*, 57:363–368, 1954.
- [FS90] S. Ferrara and S. Sabharwal. Quaternionic manifolds for type ii superstring vacua of Calabi-Yau spaces. *Nuclear Physics B*, 332(2):317 – 332, 1990.
- [Ger71] Robert Geroch. A method for generating solutions of Einstein equations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(6):918–924, 1971.
- [GGKP11] Pietro Galli, Kevin Goldstein, Stefanos Katmadas, and Jan Perz. First-order flows and stabilisation equations for non-bps extremal black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2011(6), 2011.
- [Gil12] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012.
- [Gis89] N Gisin. Stochastic quantum dynamics and relativity. *Helvetica Physica Acta*, 62:363, 1989.
- [GK94] Izrail Moiseevich Gel’fand and Andrey V. Kapranov, Mikhail M. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [GLP07] Davide Gaiotto, Wei Li, and Megha Padi. Non-supersymmetric attractor flow in symmetric spaces. *Journal of High Energy Physics*, 2007(12):093, 2007.
- [GLS08a] Eric G. Gimon, Finn Larsen, and Joan Simón. Black holes in supergravity: the non-BPS branch. *Journal of High Energy Physics*, 2008(01):040, 2008.
- [GLSW09] Mariana Graña, Jan Louis, Aaron Sim, and Daniel Waldram. E7(7) formulation of N=2 backgrounds. *Journal of High Energy Physics*, 2009(07):104, 2009.
- [GM04] GianCarlo Ghirardi and Luca Marinatto. General criterion for the entanglement of two indistinguishable particles. *Phys. Rev. A*, 70:012109, Jul 2004.
- [GNPW06] Murat Gunaydin, Andrew Neitzke, Boris Pioline, and Andrew Waldron. BPS black holes, quantum attractor flows, and automorphic forms. *Phys. Rev. D*, 73:084019, Apr 2006.
- [GNPW07] Murat Günaydin, Andrew Neitzke, Boris Pioline, and Andrew Waldron. Quantum attractor flows. *Journal of High Energy Physics*, 2007(09):056, 2007.
- [GO11] Mariana Graña and Francesco Orsi. N=1 vacua in exceptional generalized geometry. *Journal of High Energy Physics*, 2011(8):1–39, 2011.
- [Gre89] A. Greenberger, D M Horne M. Zeilinger. *Bells Theorem, edited by M. Kafatos*. Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [GST83] M. Gunaydin, G. Sierra, and P.K. Townsend. Exceptional Supergravity Theories and the MAGIC Square. *Phys.Lett.*, B133:72, 1983.

- [GST84] M. Gunaydin, G. Sierra, and P.K. Townsend. The Geometry of N=2 Maxwell-Einstein Supergravity and Jordan Algebras. *Nucl.Phys.*, B242:244, 1984.
- [GST85] M. Gunaydin, G. Sierra, and P.K. Townsend. Gauging the $d = 5$ Maxwell-Einstein Supergravity Theories: More on Jordan Algebras. *Nucl.Phys.*, B253:573, 1985.
- [GSV06] Sergei Gukov, Kirill Saraikin, and Cumrun Vafa. Entropic principle and asymptotic freedom. *Phys. Rev. D*, 73:066010, Mar 2006.
- [GT09b] Otfried Gühne and Géza Tóth. Entanglement detection. *Physics Reports*, 474(1–6):1 – 75, 2009.
- [Gur35] G. B. Gurevich. Classification of trivectors of rank eight. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 2:5-6:353–355, 1935.
- [Gur48] G. B. Gurevich. Algebra of trivectors ii. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.*, 6:28–124, 1948.
- [Gur64] G.B. Gurevich. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Noordhoff, Groningen, 1964.
- [GW02] Luca Ghirardi, GianCarlo Marinatto and Tullio Weber. Entanglement and properties of composite quantum systems: A conceptual and mathematical analysis. *J. Stat. Physics*, 108:49, Jul 2002.
- [GW10] Gilad Gour and Nolan R. Wallach. All maximally entangled four-qubit states. *J. Math. Phys.*, 51:112201, Nov 2010.
- [GW12] Gilad Gour and Nolan R. Wallach. *On symmetric SL-invariant polynomials in four qubits, in „Symmetry in representation theory and its applications.” In honour of Nolan R. Wallach*. Birkhäuser, 2012.
- [Haw75a] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys*, 43:199, 1975.
- [Haw75b] S.W. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3):199–220, 1975.
- [Hea14] Matthew Headrick. General properties of holographic entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2014(3):1–28, 2014.
- [Her09] Christopher P. Herzog. Lectures on holographic superfluidity and superconductivity. *J. Phys. A*, 42:343001, August 2009.
- [HH83] L.P. Hughston and T.R. Hurd. A CP5 calculus for space-time fields. *Physics Reports*, 100(5):273 – 326, 1983.
- [Hit00] N. Hitchin. The geometry of three forms in six dimensions. *J. Diff. Geom.*, 55:547–576, 2000.
- [Hit01] N. Hitchin. *Stable forms and special metrics*. in "Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray" M. Fernandez and J. A. Wolf (eds), Contemporary Mathematics 288, American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [Hit03] N. Hitchin. Generalized Calabi-Yau manifolds. *Quart. J. Math. Oxford*, 54:281–308, 2003.
- [HJW93] Lane P. Hughston, Richard Jozsa, and William K. Wootters. A complete classification of quantum ensembles having a given density matrix. *Phys. Lett. A*, 183(1):14 – 18, 1993.
- [HK07] Kyosuke Hotta and Takahiro Kubota. Exact solutions and the attractor mechanism in non-BPS black holes. *Progress of Theoretical Physics*, 118(5):969–981, 2007.
- [HL82] Reese Harvey and H. Blaine Lawson. Calibrated geometries. *Acta Mathematica*, 148(1):47–157, 1982.
- [HL16] Frédéric Holweck and Péter Lévy. Classification of multipartite systems featuring only W and GHZ genuine entangled states. *Journal of Physics A: Mathematical*

- and *Theoretical*, 49(8):085201, 2016.
- [HM99] Jeff Harvey and Gregory Moore. Superpotentials and membrane instantons. *arXiv:hep-th/9907026*, 1999.
- [HSYY08] Peter Huggins, Bernd Sturmfels, Josephine Yu, and Debbie S. Yuster. The hyperdeterminant and triangulations of the 4-cube. *Mathematics of Computation*, 77:1653–1679, February 2008.
- [HT88] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. Dynamics of chiral (self-dual) p-forms. *Physics Letters B*, 206(4):650 – 654, 1988.
- [HT95] C.M. Hull and P.K. Townsend. Unity of superstring dualities. *Nuclear Physics B*, 438(1–2):109 – 137, 1995.
- [HT07] Tomoyoshi Hirata and Tadashi Takayanagi. Ads/cft and strong subadditivity of entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2007(02):042, 2007.
- [Hul07] Christopher M. Hull. Generalised geometry for M-theory. *Journal of High Energy Physics*, 2007(07):079, 2007.
- [HW97] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78(26):5022–5025, Jun 1997.
- [Igu70] Jun-Ichi Igusa. Classification of spinors up to dimension twelve. *American Journal of Mathematics*, 92(4):997, 1970.
- [Ima92] M. Imayoshi, Y. Taniguchi. *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Springer-Verlag, 1992.
- [INV02] Amer Iqbal, Andrew Neitzke, and Cumrun Vafa. A mysterious duality. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 5:769–808, 2002.
- [Jac68] N Jacobson. *Structure and Representations of Jordan Algebras*. AMS Colloq. Publ. XXXIX ,Amer. Math. soc. Providence RI, 1968.
- [JES⁺11] Markus Johansson, Marie Ericsson, Kuldeep Singh, Erik Sjöqvist, and Mark S Williamson. Correlation-induced non-abelian quantum holonomies. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(14):145301, 2011.
- [JHS07] K. Becker J. H. Schwartz, M. Becker. *String Theory and M-Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [JW83] J. Bagger J. Wess. *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, 1983.
- [KasidZ01a] Marek Kuś and Karol Życzkowski. Geometry of entangled states. *Phys. Rev. A*, 63:032307, Feb 2001.
- [KK69] S. Kobayashi and Nomizu K. *Foundations of differential Geometry*. Interscience, New York, 1969.
- [KK96] Renata Kallosh and Barak Kol. E(7) symmetric area of the black hole horizon. *Phys. Rev. D*, 53:R5344–R5348, May 1996.
- [KKM08] Igor R. Klebanov, David Kutasov, and Arvind Murugan. Entanglement as a probe of confinement. *Nuclear Physics B*, 796(1–2):274 – 293, 2008.
- [KL06] Renata Kallosh and Andrei Linde. Strings, black holes, and quantum information. *Phys. Rev. D*, 73:104033, May 2006.
- [Kly06] Alexander A Klyachko. Quantum marginal problem and n-representability. *Journal of Physics: Conference Series*, 36(1):72, 2006.
- [Kod05] Kunihiro Kodaira. *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*. Classics in Mathematics. Springer, 2005.
- [Kov12] Y. V. Kovchegov. AdS/CFT applications to relativistic heavy-ion collisions: a brief review. *Reports on Progress in Physics*, 75:124301, November 2012.
- [KPRT07] Alex Kasman, Kathryn Pedings, Amy Reisl, and Shiota Takahiro. Universality of rank 6 Plücker relations and Grassmann cone preserving maps. *Proceedings of*

- the American Mathematical Society, 136:77–87, 2007.
- [Kru07] Sergei Krutelevich. Jordan algebras, exceptional groups, and Bhargava composition. *Journal of Algebra*, 314(2):924 – 977, 2007.
- [KSS06] Renata Kallosh, Navin Sivanandam, and Masoud Soroush. Exact attractive non-BPS STU black holes. *Phys. Rev. D*, 74:065008, Sep 2006.
- [LCV07] Yi-Kai Liu, Matthias Christandl, and F. Verstraete. Quantum computational complexity of the n -representability problem: Qma complete. *Phys. Rev. Lett.*, 98:110503, Mar 2007.
- [Lév90] Péter Lévy. Geometrical description of $su(2)$ Berry phases. *Phys. Rev. A*, 41:2837–2840, Mar 1990.
- [Lév91] Péter Lévy. Quaternionic gauge fields and the geometric phase. *J. Math. Phys.*, 32:2347–2358, 1991.
- [LM77] J. M. Leinaas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 37(1):1–23, 1977.
- [LNPG17] Péter Lévy, Szilvia Nagy, János Pipek, and Sárosi Gábor. The Coupled Cluster Method and entanglement for three fermion systems. *Journal of Mathematical Physics*, 58:1063, 2017.
- [LP81] C. Le Paige. Sur les formes trilineaires. *Comp. Acad. Sci.*, 92:1103–1105, 1881.
- [LPS13] Péter Lévy, Michel Planat, and Metod Saniga. Grassmannian connection between three- and four-qubit observables, mermin’s contextuality and black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2013(9):37, 2013.
- [LT03] Jean-Gabriel Luque and Jean-Yves Thibon. Polynomial invariants of four qubits. *Phys. Rev. A*, 67:042303, Apr 2003.
- [LT06] Jean-Gabriel Luque and Jean-Yves Thibon. Algebraic invariants of five qubits. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(2):371, 2006.
- [Mal99] Juan Maldacena. The large- N limit of superconformal field theories and supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1113–1133, 1999.
- [Mal03] Juan Maldacena. Eternal black holes in anti-de Sitter. *Journal of High Energy Physics*, 2003(04):021, 2003.
- [Man06] L. Manivel. Configurations of lines and models of Lie algebras. *Journal of Algebra*, 304(1):457 – 486, 2006.
- [McC04] K McCrimmon. *A Taste of Jordan Algebras*. Universitext Springer-Verlag, New York, 2004.
- [MD01] Rémy Mosseri and Rossen Dandoloff. Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(47):10243, 2001.
- [Mer07] David Mermin. *Quantum Computer Science: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 2007.
- [Min80] Masatsugu Minami. Quaternionic gauge fields on s^7 and Yang’s $su(2)$ monopole. *Progress of Theoretical Physics*, 63(1):303–321, 1980.
- [Miy03] Akimasa Miyake. Classification of multipartite entangled states by multidimensional determinants. *Phys. Rev. A*, 67:012108, Jan 2003.
- [Moh01] Thomas Mohaupt. Black hole entropy, special geometry and strings. *Fortschritte der Physik*, 49(1-3):3–161, 2001.
- [Moo98] G. Moore. Arithmetic and attractors. *arXiv:hep-th*, 9807087, 1998.
- [MQS⁺13] Alessio Marrani, Cong-Xin Qiu, Sheng-Yu Darren Shih, Anthony Tagliaferro, and Bruno Zumino. Freudenthal gauge theory. *Journal of High Energy Physics*, 2013(3):132, 2013.

- [Muk84] S. Mukai. Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or $k3$ surface. *Invent. Math.*, 77:1013, 1984.
- [MW02] David A. Meyer and Nolan R Wallach. Global entanglement in multipartite systems. *J. Math. Phys.*, 43:4273, 2002.
- [Nab03] Gregory L. Naber. *The geometry of Minkowski spacetime*. Springer, 2003.
- [Nak98] Jin Nakagawa. On the relations among the class numbers of binary cubic forms. *Invent. math.*, 134:101, 1998.
- [NC00] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 1 edition, October 2000.
- [Nie99] M. A. Nielsen. Conditions for a class of entanglement transformations. *Phys. Rev. Lett.*, 83:436–439, Jul 1999.
- [Noz90] Ryohei Nozawa. Max-flow min-cut theorem in an anisotropic network. *Osaka J. Math.*, 27(4):805–842, 1990.
- [NTU63] E. Newman, L. Tamburino, and T. Unti. Empty space generalization of the Schwarzschild metric. *Journal of Mathematical Physics*, 4(7):915–923, 1963.
- [OCZ⁺11] Samuel A. Ocko, Xie Chen, Bei Zeng, Beni Yoshida, Zhengfeng Ji, Mary Beth Ruskai, and Isaac L. Chuang. Quantum codes give counterexamples to the unique pre-image conjecture of the n -representability problem. *Phys. Rev. Lett.*, 106:110501, Mar 2011.
- [Oed09] Luke Oeding. G -varieties and the principal minors of symmetric matrices. PhD Thesis Texas AM University, 2009.
- [OP93] Masanori Ohya and Dénes Petz. *Quantum Entropy and Its Use*. Springer Verlag, 1 edition, October 1993.
- [OSV04] Hirosi Ooguri, Andrew Strominger, and Cumrun Vafa. Black hole attractors and the topological string. *Phys. Rev. D*, 70:106007, Nov 2004.
- [OVV05] Hirosi Ooguri, Cumrun Vafa, and Erik Verlinde. Hartle–hawking wave-function for flux compactifications: the entropic principle. *Letters in Mathematical Physics*, 74(3):311–342, 2005.
- [Pen67] R. Penrose. Twistor algebra. *Journal of Mathematical Physics*, 8(2):345–366, 1967.
- [Pes06] Vasily Pestun. Black hole entropy and topological strings on generalized CY manifolds. *Journal of High Energy Physics*, 2006(09):034, 2006.
- [Pol98] J. Polchinski. *String Theory II*. Cambridge University Press, 1998.
- [Pop78] V.L. Popov. Classification of spinors of dimension fourteen. *Trans. Moscow. Math. Soc.*, 37:181, 1978.
- [PS09] Michel Planat and Patrick Solé. Clifford groups of quantum gates, BN-pairs and smooth cubic surfaces. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(4):042003, 2009.
- [PW05] Vasily Pestun and Edward Witten. The Hitchin functionals and the topological B-model at one loop. *Letters in Mathematical Physics*, 74(1):21–51, 2005.
- [PYHP15] Fernando Pastawski, Beni Yoshida, Daniel Harlow, and John Preskill. Holographic quantum error-correcting codes: toy models for the bulk/boundary correspondence. *Journal of High Energy Physics*, 2015(6):1–55, 2015.
- [Rei07] Walter Reichel. *Über trilineare alternierende Formen in sechs und sieben Veränderlichen und die durch sie definierten geometrischen Gebilde*. Druck von B. G. Teubner in Leipzig, Dissertation an der Universität Greifswald, 1907.
- [Rob59] I. Robinson. A solution of the Maxwell-Einstein equations. *Bull. Acad. Polon.*, 7:351, 1959.
- [RSAC05] Dijkgraaf R., Gukov S., Neitzke A., and Vafa C. Topological M-theory as unification of form theories of gravity. *Adv. Thoeer. Math. Phys.*, 9:603–665, 2005.

- [RT06] Shinsei Ryu and Tadashi Takayanagi. Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de Sitter space/conformal field theory correspondence. *Phys. Rev. Lett.*, 96:181602, May 2006.
- [Rus07] Mary Beth Ruskai. Connecting n -representability to weyl’s problem: the one-particle density matrix for $n = 3$ and $r = 6$. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(45):F961, 2007.
- [S16] Gábor Sárosi. Entropy of nonextremal stu black holes: The f -invariant unveiled. *Phys. Rev. D*, 93:024036, Jan 2016.
- [Sab98] W.A. Sabra. Black holes in $N=2$ supergravity theories and harmonic functions. *Nuclear Physics B*, 510(1–2):247 – 263, 1998.
- [Sár12] Gábor Sárosi. *A fekete lyuk qubit megfelelés*. Msc dolgozat BME Fizikai Intézet Elméleti Fizika Tanszék, 2012.
- [Sár16] Gábor Sárosi. Fermionic entanglement theory and the Black Hole/Qubit Correspondence. PhD Thesis Budapest University of Technology, Institute of Physics, Department of theoretical Physics 2016, 2016.
- [Sch52] L. Schläfli. Über die resultante eines systemes mehrerer algebraischer gleichungen. *Denkschr. Kaiserl. Akad. Wiss. Mathnaturwiss.*, Klasse 4, 1852.
- [Sch22] E. Schwartz. Über binäre trilineare formen. *Math. Zeitsch.*, 12:18–35, 1922.
- [Sch31] J. A. Schouten. Klassifizierung der alternierenden grössen dritten grades in 7 dimensionen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 55:137–156, 1931.
- [Sch35a] Ervin Schrödinger. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23:807, 1935.
- [Sch35b] Ervin Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 31:555, 1935.
- [SCKas⁺01] John Schliemann, J. Ignacio Cirac, Marek Kuś, Maciej Lewenstein, and Daniel Loss. Quantum correlations in two-fermion systems. *Phys. Rev. A*, 64:022303, Jul 2001.
- [Sek87] Jiro Sekiguchi. Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. *J. Math. Soc. Japan*, 39(1):127–138, 01 1987.
- [SEN94] ASHOKE SEN. Strong–weak coupling duality in four-dimensional string theory. *International Journal of Modern Physics A*, 09(21):3707–3750, 1994.
- [SGC13] Christian Schilling, David Gross, and Matthias Christandl. Pinning of fermionic occupation numbers. *Phys. Rev. Lett.*, 110:040404, Jan 2013.
- [Shm97] Marina Shmakova. Calabi-Yau black holes. *Phys. Rev. D*, 56:R540–R544, Jul 1997.
- [Sho99] Peter W. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Review*, 41(2):303–332, 1999.
- [Sie87] Germán Sierra. An application of the theories of Jordan algebras and Freudenthal triple systems to particles and strings. *Classical quantum Gravity*, 4:227–236, 1987.
- [SK77] M. Sato and T. Kimura. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. *Nagoya Math. J.*, 65:1–155, 1977.
- [SK12] Szilárd Szalay and Zoltán Kökényesi. Partial separability revisited: Necessary and sufficient criteria. *Phys. Rev. A*, 86:032341, Sep 2012.
- [SL14a] Gábor Sárosi and Péter Lévy. Coffman-Kundu-Wootters inequality for fermions. *Phys. Rev. A*, 90:052303, Nov 2014.
- [SL14b] Gábor Sárosi and Péter Lévy. Entanglement classification of three fermions with up to nine single-particle states. *Phys. Rev. A*, 89:042310, Apr 2014.

- [SL14c] Gábor Sárosi and Péter Lévy. Entanglement in fermionic Fock space. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(11):115304, 2014.
- [Sol06] Sergey N. Solodukhin. Entanglement entropy of black holes and anti-de Sitter space/conformal-field-theory correspondence. *Phys. Rev. Lett.*, 97:201601, Nov 2006.
- [Str83] Gilbert Strang. Maximal flow through a domain. *Mathematical Programming*, 26(2):123–143, 1983.
- [Sus95] Leonard Susskind. The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11):6377–6396, 1995.
- [SV08] Kirill Saraikin and Cumrun Vafa. Non-supersymmetric black holes and topological strings. *Classical and Quantum Gravity*, 25(9):095007, 2008.
- [SYZ96] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow. Mirror symmetry is T-duality. *Nuclear Physics B*, 479(1):243 – 259, 1996.
- [Sza11] Szilárd Szalay. Separability criteria for mixed three-qubit states. *Phys. Rev. A*, 83:062337, Jun 2011.
- [Sza12] Szilárd Szalay. All degree 6 local unitary invariants of k qudits. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(6):065302, 2012.
- [Sza13] Szilárd Szalay. Quantum entanglement in finite dimensional Hilbert spaces. PhD Thesis Budapest University of Technology, Institute of Physics, Department of theoretical Physics 2013, 2013.
- [tH76] G. 't Hooft. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle. *Phys. Rev. D*, 14:3432–3450, Dec 1976.
- [tH93] Gerard 't Hooft. Dimensional reduction in quantum gravity. *arXiv: gr-qc/9310026*, 1993.
- [TT94] Andrzej Trautman and Krzysztof Trautman. Generalized pure spinors. *Journal of Geometry and Physics*, 15(1):1 – 22, 1994.
- [Uen95] Kenji Ueno. *An Introduction to Algebraic Geometry*. Translations of Mathematical Monographs Vol. 166, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1995.
- [VDDMV02] F. Verstraete, J. Dehaene, B. De Moor, and H. Verschelde. Four qubits can be entangled in nine different ways. *Phys. Rev. A*, 65:052112, Apr 2002.
- [Ver04] Erik Verlinde. Attractors and the holomorphic anomaly. *arXiv:hep-th/0412139*, 2004.
- [Vid00] Guifre Vidal. Entanglement monotones. *J. Mod. Opt.*, 47(2):355–376, Feb 2000.
- [VL09] Péter Vrana and Péter Lévy. Special entangled quantum systems and the Freudenthal construction. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(28):285303, 2009.
- [VL10] Péter Vrana and Péter Lévy. The Veldkamp space of multiple qubits. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(12):125303, 2010.
- [Vra11a] Péter Vrana. Group representations in entanglement theory. PhD Thesis Budapest University of Technology, Institute of Physics, Department of theoretical Physics 2011, 2011.
- [Vra11b] Péter Vrana. Local unitary invariants for multipartite quantum systems. *J. Phys. A*, 44(11):115302, 2011.
- [Vra11c] Péter Vrana. On the algebra of local unitary invariants of pure and mixed quantum states. *J. Phys. A*, 44(22):225304, 2011.
- [VV13] Erik Verlinde and Herman Verlinde. Black hole entanglement and quantum error correction. *Journal of High Energy Physics*, 2013(10):1–34, 2013.
- [Wal84] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.

- [WC01] Alexander Wong and Nelson Christensen. Potential multiparticle entanglement measure. *Phys. Rev. A*, 63:044301, Mar 2001.
- [WDGC13] Michael Walter, Brent Doran, David Gross, and Matthias Christandl. Entanglement polytopes: Multiparticle entanglement from single-particle information. *Science*, 340(6137):1205–1208, 2013.
- [Wil82] Frank Wilczek. Quantum mechanics of fractional-spin particles. *Phys. Rev. Lett.*, 49:957–959, Oct 1982.
- [Wit88a] Edward Witten. Topological quantum field theory. *Communications in Mathematical Physics*, 117(3):353–386, 1988.
- [Wit88b] Edward Witten. Topological sigma models. *Communications in Mathematical Physics*, 118(3):411–449, 1988.
- [Wit93] Edward Witten. Quantum background independence in string theory. *arXiv:hep-th/9306122*, 1993.
- [Woo98] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10):2245–2248, Mar 1998.
- [Woo01] William K. Wootters. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Info. Comput.*, 1(1):27–44, January 2001.
- [WW91] R.S. Ward and Raymond O. Wells. *Twistor Geometry and field theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [YA75] Kiyoshi Yamaguti and Hiroshi Asano. On the Freudenthals’s construction of exceptional Lie algebras. *Proc. Japan Acad.*, 51:253–258, 1975.
- [Zum62] Bruno Zumino. Normal forms of complex matrices. *J. Math. Phys.*, 3:1055, 1962.